Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5

ROČNÍKOVÁ PRÁCE

Klínové plochy

Vypracoval: Vojtěch Kolář

Třída: 4.C

Školní rok:2013/2014

Seminář: Deskriptivní geometrie

Prohlašuji, že jsem svou ročníkovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím s využitím práce na Gymnáziu Christiana Dopplera pro studijní účely.

V praze dne 24.2 2014 Vojtěch Kolář

Klínové plochy

Obsah

Úvod

V této práci se budu zabývat klínovými neboli Hacarovými plochami, které byly zavedeny především z důvodu, že některé plochy jako například hyperbolické paraboliody, se špatně napojují na jiné plochy, z důvodů nevhodných vlastností.

Hacarova plocha prvního druhu

V této kapitole uvedememe definici klínové plochy. Nejprve však řekneme rovnice Hacarovy plochy prvního druhu, řídící přímky a paraboly, jež jsou definovány v Diplomové práci Jany Veckové.

Rovnice plochy... $v\colon z = -\frac{1}{2c^2q}x^2y^2 - \frac{n}{c^2}x^2 + \frac{1}{2q}y^2 + n$.

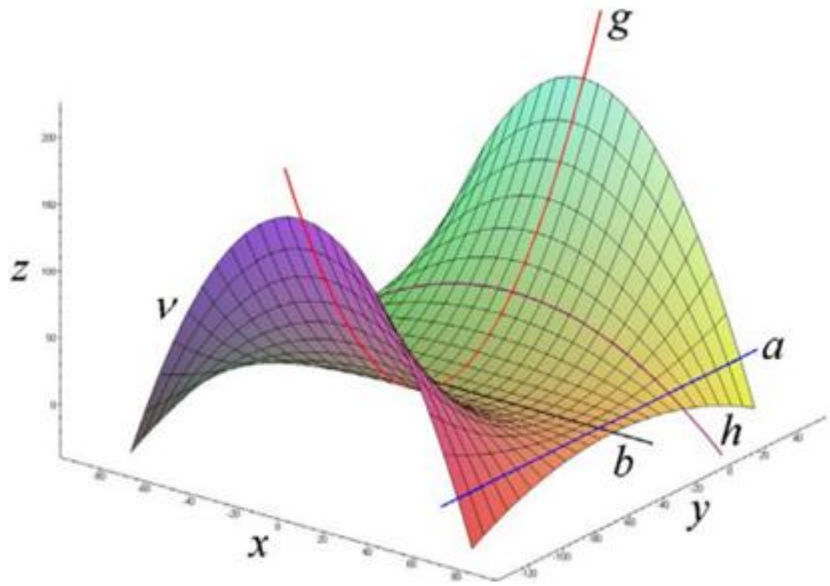
Řídící parabola... g **:** ($x = 0$) ∩ [$2q$ ($z - n$) = y^2] , přičemž q je kladné reálné číslo a n je nezáporné reálné číslo.

Řídící přímka... a: $(x = c) \cap (z = 0)$, kde c je kladná reálná konstanta.

S tímto nyní můžeme vyslovit definici. Máme daný pravoúhlý souřadnicový systém s osami x, y, z a máme roviny α a β, pro které platí rovnice: α : x = 0, β : y = 0. Nyní ještě musíme označit rovinné křivky g, h ležící v roviních α a β. Těmto křivkám dáme ještě společný průsečík, náležící ose z. Plochu která vznikla nazveme klínovou plochou, pouze jestliže je tvořena křivkami h_{y_0}, které leží v rovinách $\beta_{y_0}\colon y = y_0$, kde y_0 jest reálná konstanta. K tomu také každá z křivek h_{y_0} musí splňovat následující vlastnosti:

1. protíná křivku g
2. její pravoúhlý průmět $\bar{h}_{y_0}$ do roviny β jest s křivkou h ve vztahu kolmé afinity v rovině β s osou afinity v ose x
3. pro konečně mnoho případů je h_{y_0} přímka.

Každou plochu v lze nazvat klínovou, pokud ji je možno umístit do prostoru tak, že by nově umístěná plocha v**‘** měla stejné vlastnosti jako již výše uvedená klínová plocha.



Obrázek 1: Hacarova plocha prvního druhu s táhlem jako klínová

Poznámka: Na obrázku jsou pro lepší představivost vyznačeny obrazy souřadnicových os (skutečné osy by procházeli obrázkem a to by ho vytvářeli méně přehledným)

Hacarova plocha druhého druhu

Nyní budeme pojednávat o Hacarově ploše druhého druhu, přičemž ta je určitou obměnou plochy prvního druhu.

Hlavní změna je tvar řídící křivky a čímž získáme jiné plochy. Musíme však ještě vyslovit plochu μ, abychom dostaly Hacarovu plochu druhého druhu. Ať je tedy plocha μ určena řídící konvexní parabolou g v rovině $x = 0$ a řídící konkávní parabolou a v rovině $x = c$. Tvořícími křivkami μ jsou paraboly v rovinách $y = y_0$ s vrcholy na parabole g, protínající parabolu a a s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou z. Tvar plochy μ dostáváme z různých poloh g a a.

Ještě je potřeba zadat řídící útvary plochy μ rovnicemi,o kterých se zmiňuje již Jana Vecková.

Řídící parabola g je zadána průnikem roviny a obecné válcové plochy
$g : (x = 0) \cap [2q\ (z - n)\ =\ y^2]$, kde q je kladná konstanta reálná a n je reálná konstanta.

Řídící parabola a je zadána podobně jako parabola g *a to takto*
$a : (x = 0) \cap [-2q\ (z - m)\ =\ y^2]$, kde c, p jsou kladné reálné konstanty a m je reálná konstanta.

Mohou všaknastat tři různé situace:

1. $n = m$
2. $n < m$
3. $n > m$

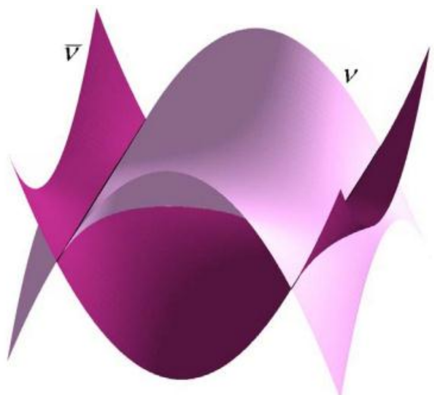
Vyřešením všech tří případů jsme schopni vyjádřit plochu μ a to takto:

$$\mu : z = -\frac{p+q}{2c^2pq}x^2y^2 + \frac{1}{2q}y^2 + n\ .$$

Tato rovnice plochy μ je pro libovolné reálné hodnoty proměnných x a y a když do této rovnice dosadíme $y = 0$ tak získáme rovnici přímky h.

Postupným upravováním rovnice docházíme k závěru, že Hacarova plocha druhého druhu má stejné vyjádření rovnicí jako Hacarova plocha prvního druhu a mají právě dvě rovnoběžné různé přímky. Obě plochy jsou stejné, pokud je zobrazíme souměrně podle roviny, v níž leží ony dvě rovnoběžky.

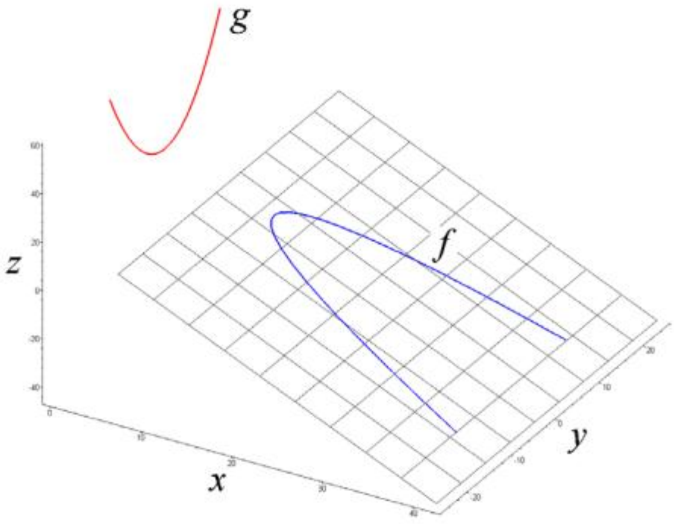
Z toho je více než zřejmé že hacarovy plochy druhého druhu se využívají k podepírání, kdežto hacarovi plochy prvního druhu se využívají k zastřešení.



Obrázek 2: Hacarova plocha prvního a druhého druhu

Hacarova plocha třítího druhu

Dva druhy Hacarových ploch již máme za sebou nyní se budeme zabývat Hacarovou plochou třetího druhu, přičemž tu budeme brát ještě z obecnějšího případu než tomu bylo u ostatních ploch. Máme tedy řídící parabulu $g: (x = 0) \cap [2p(z - n) = y^2]$, přičemž p, n jsou kladné reálné konstanty. Mějme ještě dánu řídící parabolu
$f: (ax + cz - ac = 0) \cap [2q(x - m) = y^2]$, kde a je reálná konstanta a c, m, q jsou kladné reálné konstanty.

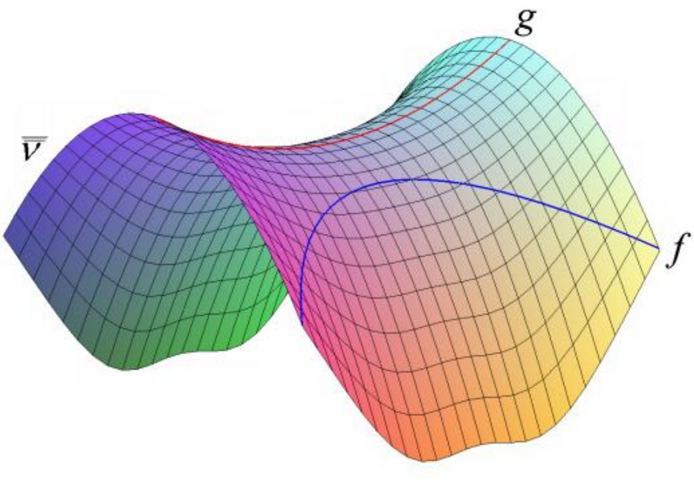


Obrázek 3: Zadání Hacarovy plochy třetího druhu

Upravou základní rovnice, též zapsané v diplomové práci Jany Veckové, dostáváme rovnici:

$$y_0^2(ap + cq) = 2pq(ac - am - cn)$$

Řešením této rovnice do tří případů dostáváme vícero řešení, kde nejběžnějším vyobrazením je následující obrázek.



Obrázek 4: Hacarova plocha třetího druhu

Klínové plochy

V této kapitole si konečně uvedeme pár příkladů klínových ploch.

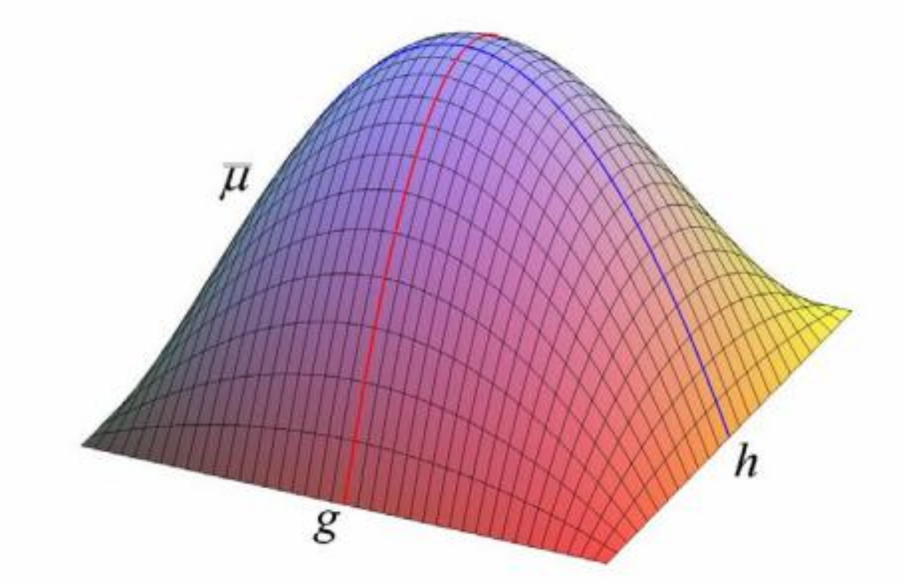
Klínová plocha parabolicko-parabolická její rovnice jsme si už definovali v kapitole Hacarova plocha druhého druhy a její definice téměř odpovídá definici z Hacarovi plochy prvního druhu a tak uvedeme jen, že pro tuto plochu platí pouze jeden ze tří případů které jsme měli u druhého druhu a to $n < m$. Z toho v diplomatické práci Jany Veckové byla odvozena rovnice plochy :

$$\overline{\mu} : z = -\frac{p+q}{2c^2pq}x^2y^2 + \frac{m-n}{c^2} + \frac{1}{2q}y^2 + n$$

Z toho to získáme rovnici křivky h na ploše $\overline{\mu}$, která leží v rovině $\beta : y = 0$. Z toho vyjde rovnice konvexní paraboly :

$$\mathrm{h}: (\mathrm{y} = 0) \cap [\frac{c^2}{m-n}(z-n) = x^2].$$

U obrázku 5 představuje plocha $\overline{\overline{\mu}}$ střechu. K tomu si musíme představit jak na krajích plocha navazuje na zdivo nějaké budovy obdelníkovytého půdorysu.



Obrázek 5: Parabolicko-parabolická klínová plocha

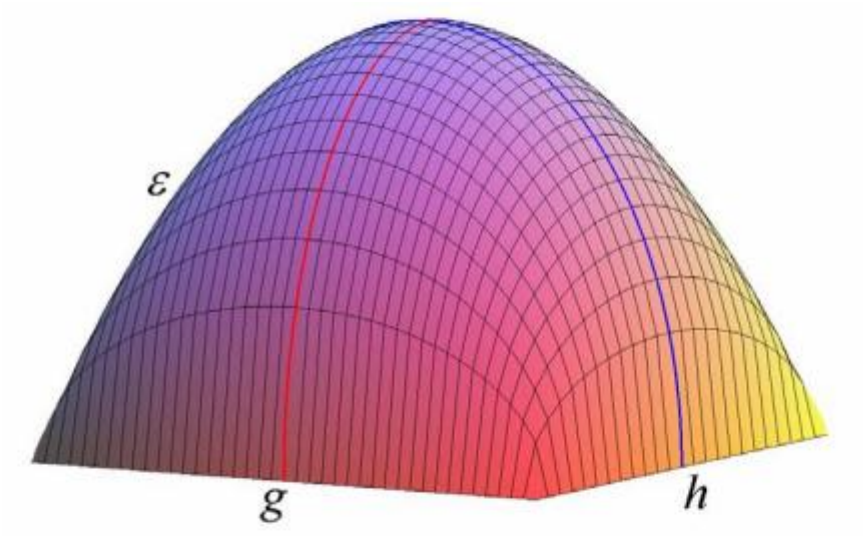
Další klínovou plochou je například elipticko-eliptická klínová plocha. Z názvu je hned jasné že tvořícími křivkami jsou elipsa g s rovnicí $(x = 0) \cap (b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2)$, u čehož a, b jsou kladné reálné konstanty, a elipsa h s rovnicí $(y = 0) \cap (b^2x^2 + d^2z^2 = b^2d^2)$, kde d je kladná reálná konstanta. Tato klínová plocha se konstruuje podobně jako parabolicko-parabolická klínová plocha.

Po úpravě získáme v intervalu (-a,a) implicitní rovnici plochy:

$$\varepsilon: z^2 = \frac{b^2}{a^2d^2}x^2y^2 - \frac{b^2}{d^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + b^2.$$

Explicitní rovnice plochy lze napsat v případě, že se vždy omezíme na jeden poloprostor ohraničený rovinou $z = 0$.

Stavebně je využitelná pouze „vrchní“ část plochy:



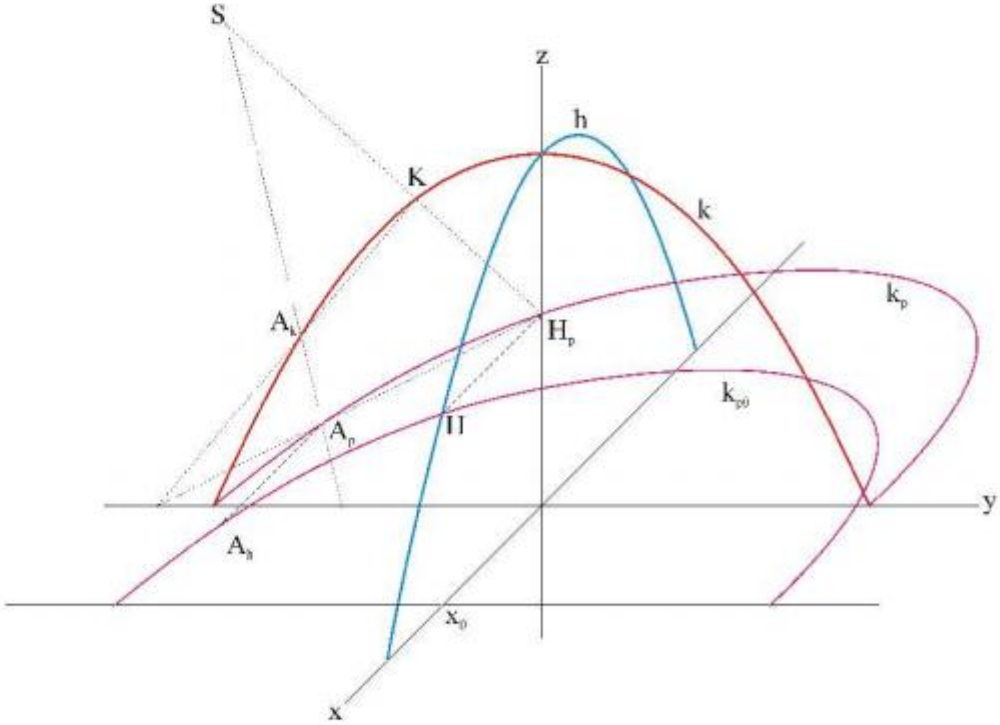
Obrázek 6: Elipticko-eliptická klínová plocha

Zobecněné klínové polochy

V této kapitole se budume věnovat zobecnění klesického pojetí klínových ploch, přičemž je zadána dvojice křivek a plocha definována pomocí afinity. Tomuto tématu se věnovala Mgr. Jana Vecková ve své práci Zobecnění klínové plochy.

Máme křivku k v rovině y, z a křivku h v rovině x, z. Zvolíme libovolnou rovinu α_0, pro kterou platí rovnice $x = x_0$, kde $x_0 \neq 0$. Nechť existuje průsečík roviny α_0 a křivky h a nazveme jej bodem $H = h_0$. Nyní posuneme roviny α_0 o vektor ($-x_0$,0,0). Tímto nám splyne rovina α_0 s rovinou (y, z) a bod H se zobrazí do bodu H_p.

V rovině y, z nechť je zadána středová kolineace ϕ středem $S \notin k$ osou kolineace v souřadnicevé ose y. Máme průsečík $K \in k$ přímky SH_p. Tímto nám vznikne středová kolineace kde ϕ *(k)* = k_p je obraz křivky k. Když posuneme křivku k_po vektor (x_0,0,0) tak získáme výslednou křivku v rovině α_0. Takto je možné postupovat pro všechna přípustná x_0.



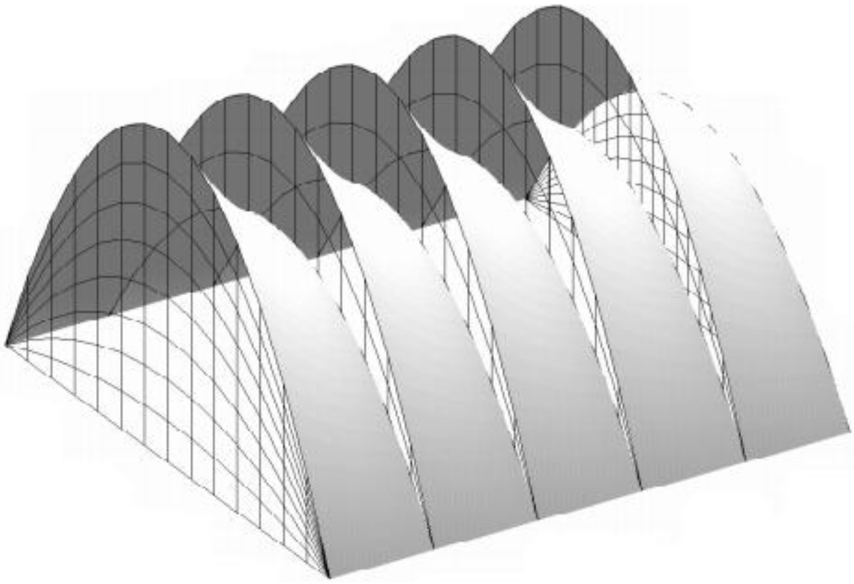
Obrázek 7

Tento postup můžeme použít při volbě konkrétních křivek. Díky tomuto zobecnění by klínové plochy našly praktické využití v moderním stavitelství, jelikož tímto se splnil základní požadavek, jež si kladl pan Hacar při konstrukci klínových ploch. Tedy chtěl, aby hraniční křivky plochy nad obdelníkovým půdorysem byly vodorovné úsečky.

Užití klínových ploch

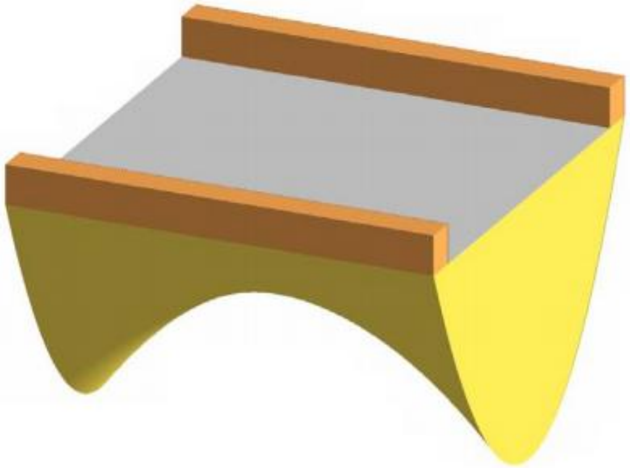
I přesto že by klínové plochy měli mít ve světě velké využití, tak se v praxy vyskytují jen výjimečně. Proto nám budou muset na obrázcích posloužit pouze počítačové modely. Velké využití klínové plochy mohou mít jako klenby jak se zmiňuje pan Piska a medek ve svém díle Deskriptivní geometrie II.

Snad největší vyžití by klínové plochy měli mít na zastřešení větších továrních hal, kde využijeme Hacarovy plochy prvního druhu a tudíž nám vzniká na jedné straně parabola s výšším vrcholem než na druhé straně. Tím se ovšem získá větší přístup světla a tak i úspora energie.



Obrázek 8: Střecha tovární haly

Na klenby mostu můžeme také využít klínové plochy, avšak nyní použijeme Hacarovu plochu druhého druhu zakončenou dvěma usečkami a dvěma častmi parabol, kde úsečny nám vytvoří krajnice silnice. Tato klínová plocha je schopna rozložit tlak na silnici a to způsobené váhou použitého materiálu a také dopravou po ní. Na následující obrázku je vidět jednoduchá varianta toho to mostu a to se silnicí a svodidly podél.



Obrázek 9: Návrh mostní podpěry

Závěr

Je škoda, že tyto plochy nenašli takové užití v praxi. Nenašel jsem totiž jediný záznam o nějaké stavbě v čechách. Tak můžemu jen doufat že se to do budoucna změní.

Seznam použité literatury

1) Prof. Dr. Rudolf Piska, Prof. RnDr. Vaclav Medek: Deskriptivní geometrie II
2) Jana Vecková: Diplomová práce – Klínové plochy
3) Mgr. Jana Vecková: Zobecněné klínové plochy