**Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5**

ROČNÍKOVÁ PRÁCE

# Kartografické projekce

Vypracoval: Jiří Novotný

Třída: 4.C

Školní rok: 2013/2014

Seminář: Deskriptivní geometrie

Prohlašuji, že jsem svou ročníkovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím s využíváním práce na Gymnáziu Christiana Dopplera pro studijní účely.

V Praze dne 24. února 2014 Jiří Novotný

OBSAH

# 1 Úvod

Kartografie je věda o sestavování všech druhů map a zahrnuje veškeré operace od počátečního vyměřování až po vydání hotové produkce. V této ročníkové práci se budu zabývat hlavně základními konstrukcemi azimutálních kartografických prejekcí. Uvedu zde typy zobrazení a jejich aplikace.

K pochopení této práce je nutná znalost středoškolské matematiky a základy deskriptivní geometrie, jelikož metody kartografických zobrazení využívají jak analytické, tak i syntetické prostředky. Základem jsou zobrazovací a promítací metody.

Kartografické projekce neboli mapová zobrazení mají za úkol čtenáře seznámit s druhy zobrazení map a také jak se mapy tvoří.

## 2 Kartografická projekce

Člověk už od dávných časů ví, že Země má tvar koule a ne placky. Kdyby byl však svět placatý, jak si třeba mysleli staří Egypťané, byla by kartografie o hodně jednodušší, neboť by nebyla potřeba žadná projekce, kterou zde budu popisovat.

Protože Země nemá ve skutečnosti tvar dokonalé koule, abychom ji mohli zobrazovat do roviny, musíme ji nahradit „referenčními“ plochami – geoidem, rotačním zploštělým elipsoidem, kulovou plochou (sférou), nebo část Země nahrazujeme rovinou (hladinovou plochou, která je v každém bodě zemského povrchu kolmá na tížnici procházející tímto bodem).

Projekce, při nichž promítáme sféru středově na rovinu kolmou k přímce určené středem promítání a středem sféry nebo pravoúhle na libovolnou rovinu, se nazývají *azimutální*. Tyto projekce lze rozdělit do tří druhů:

1. **Normální** (pólová) – průmětna je kolmá na osu *o* spojující severní a jižní pól
2. **Příčná** (transverzální, rovníková) – průmětna je rovnoběžná s osou *o*
3. **Obecná** (šikmá) – ve všech ostatních případech

Referenční sféru neboli elipsoid promítáme zároveň se zvolenou kartografickou sítí, kterou tvoří poledníky a rovnoběžky těchto ploch.

Jeden z poledníků zvolíme za nultý poledník. Každým bodem, který není pólem, prochází jediný poledník, nazýváme ho místním poledníkem. Následně každému bodu referenční plochy přiřadíme dvojici zeměpisných souřadnic vzhledem ke zvolenému nultému poledníku a rovníku – zeměpisnou délku a zeměpisnou šířku.

Zeměpisná délka $\lambda$ je odchylka poloroviny místního poledníku od poloroviny nultého poledníku, měříme ji na západ, resp. na východ, od $0°$ do $180°$ (hovoříme o západní, resp. východní délce).

Zeměpisná šířka $\varphi$ je odchylka poloměru $OM$ od roviny rovníku, kde $O$ je střed referenční sféry, resp. referenčního elipsoidu. Měříme ji na sever, resp. na jih od rovníku, od $0°$ do $90°$ (hovoříme o severní, resp. jižní šířce).

V následující části si ukážeme pokaždé všechny tři volby průmětny pro tři projekce sféry.

Jsou to ortografická, stereografická a gnómonická projekce. A u některých z těchto projekcí odvodíme i zobrazovací rovnice.

## 2.1 Ortografická projekce

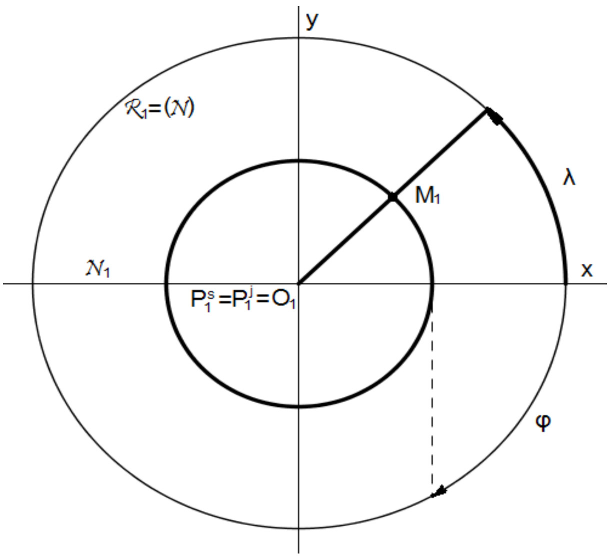
Ortografická projekce je kolmé promítání sféry na průmětnu $\pi$, kterou budeme volit tak, aby procházela středem $O$ sféry. Průmětem sféry je kruh o poloměru rovnému poloměru sféry.

### 2.1.1 Normální ortografická projekce

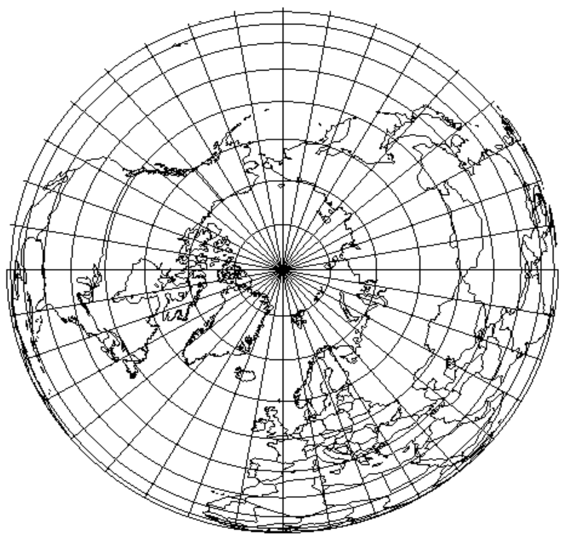
Průmět rovníku je kružnice $R_1$ a oba póly $P^S$ *a* $P^j$ se promítají do jejího středu, jelikož směr promítání je rovnoběžný s osou *o*. Poledníky se zobrazují do poloměrů kružnice $R_{1}$, obr. 1 a).

Průměty rovnoběžnic jsou kružnice, které jsou shodné se svými vzory. Určíme je tak, že např. rovinu nultého poledníku N sklopíme do průmětny, nultý poledník se přitom sklopí do kružnice $R_{1}$.

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic podle obr. 1 a), můžeme pomocí zeměpisných souřadnic bodu na sféře určit obraz $M_1 = [r \cos \varphi \cos \lambda; r \cos \varphi \sin \lambda]$ bodu $M = [\varphi ; \lambda]$ sféry, kde $|O_1 M_1| = r \cos \varphi$. Normální ortografická projekce je vhodná pro zobrazování polárních oblastí, obr. 1 b).




*a)*

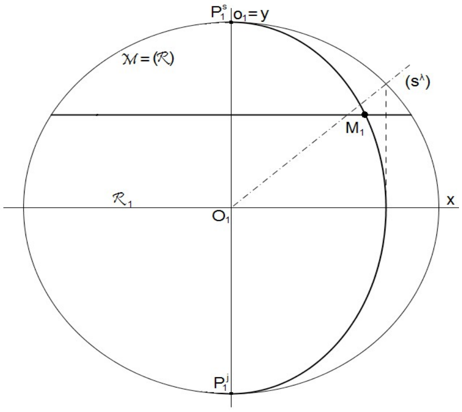


*b)*

Obr. 1

## 2.1.2 Příčná ortografická projekce

Průmětna $\pi$ prochazí osou $o = P^{s} P^{j}$. Obrysem sféry je kružnice $\mathcal{M}_1$ o poloměru rovnému poloměru $r$ sféry. Průmětem $\mathcal{R}_1$ rovníku je průměr kružnice $\mathcal{M}_1$ , který je kolmý na osu $o_1$. Průměty rovnoběžek jsou tětivy kružnice $\mathcal{M}_1$ , které jsou kolmé na osu $o_1$, obr. 2.




*a)*

*b)*

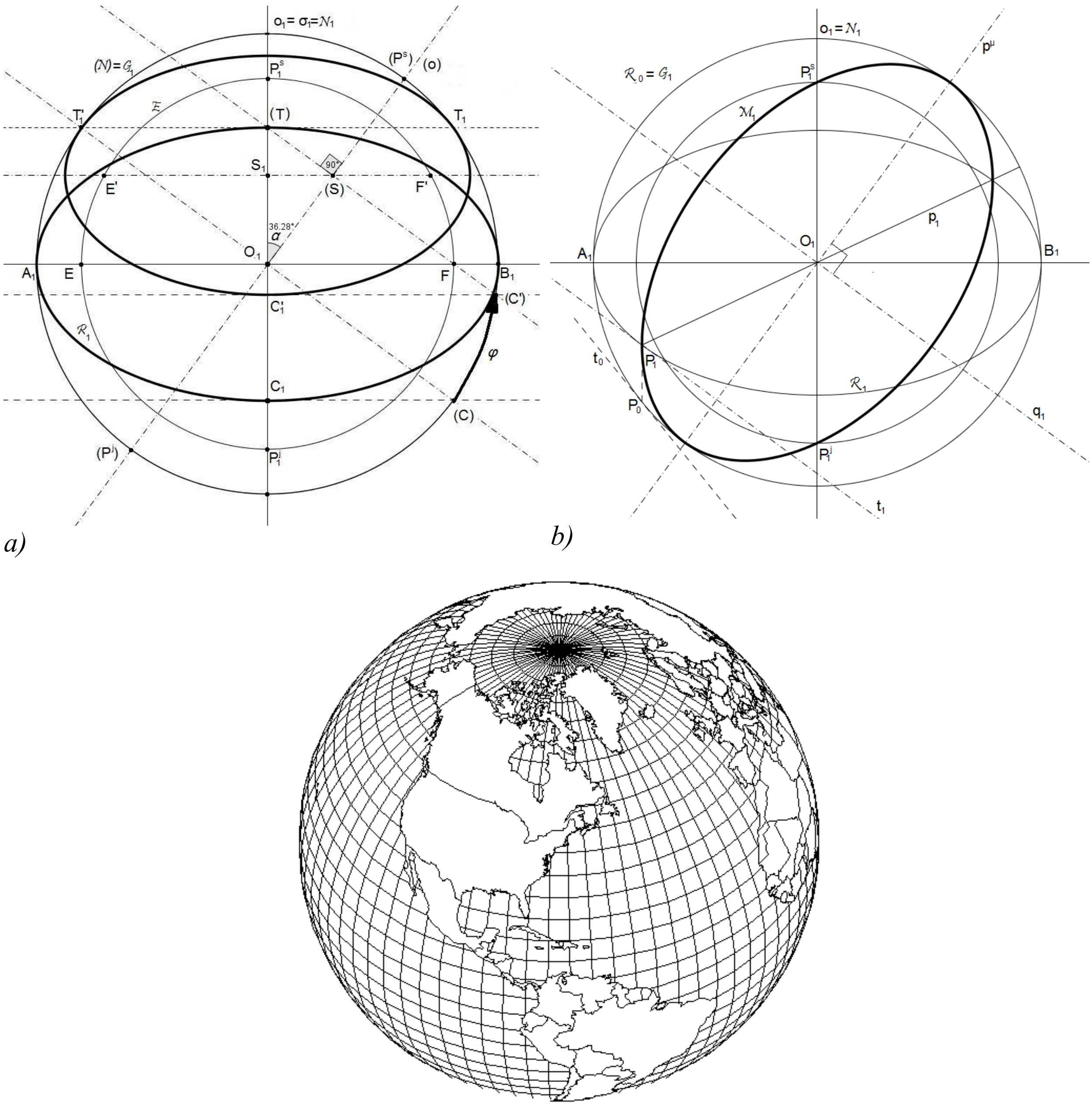
Obr. 2

Poledníky se promítají na elipsy s hlavní osou $P_1^S\ P_1^{\ j}$. Vedlejší osy určíme sklopením spádových přímek $s^{\lambda}$ rovin poledníků obr. 2. Průmět bodu $M$ sféry leží na elipse s poloosami $r$ a $r \sin \lambda$, proto pro něj platí $M_1 = [r \sin \lambda \cos \varphi\ ;\ r \sin \varphi]$, kdy kartézskou soustavu souřadnic volíme podle obr. 2.

## 2.1.3 Obecná ortografická projekce

Průmětna $\pi$ není při ortografické projekci kolmá na osou $o$ a ani s ní není rovnoběžná. Obrysem sféry je kružnice $\mathcal{G}_1$ o poloměru rovnému poloměru sféry. Volba průmětny $\pi$ je ekvivalentní volbě průmětu pólů $P^S$ , $P^j$, odchylku osy $o$ od průmětny $\pi$ označíme $\alpha$ .

Průmětem rovnoběžek budou elipsy. Pro jejich určení musíme sklopit promítací rovinu $\sigma$ osy $o$. Póly se sklopí na kružnici $\mathcal{G}_1$ , poledník $\mathcal{N}$ (v rovině $\sigma$) se sklopí do kružnice $\mathcal{G}_1$ a průsečnice roviny $\sigma$ s rovinami rovnoběžek do kolmic k přímce $(o)$. Na sklopeném poledníku $(\mathcal{N})$ můžeme odměřit zeměpisné šířky rovnoběžek a velikosti hlavních poloos elips, do kterých se promítají. Vidíme též sklopené vedlejší vrcholy ($(C)$, $(C')$,. . .) elips a body dotyku s obrysem kulové plochy (body $(T)$), obr. 3 a).




Obr. 3

Ve sklopení na obr. 3 a) také vidíme, že pro ohnisko $F$ průmětu rovníku platí $|O_1\ P_1^{S}| = r \cos \alpha$, $|O_1\ C_1| = r \sin \alpha \Rightarrow |O_1\ F| = \sqrt{(r^2 - r^2 \sin^2 \alpha)} = r \cos \alpha$. To tedy znamená, že vzdálenost ohniska $F$ elipsy $\mathcal{R}_1$, která je obrazem rovníku, od středu $O_1$, je stejná jako vzdálenosti průmětů obou pólů od bodu $O_1$.

Určíme-li poměr poloos elipsy $\mathcal{R}_1$, $r : r \sin \alpha = 1 : \sin \alpha$, vidíme, že tento poměr závisí pouze na odchylce osy $o$ od průmětny. Ohniska všech elips, které jsou průmětny rovnoběžek, leží na kružnici E = ($O_1$ , $|P_1$ s $O_1|$).

Průmětem poledníků jsou elipsy o společném průměru $P_1\ sP_1{}^j$. Zeměpisné délky poledníků měříme na rovníku. Proto otočíme rovinu rovníku kolem její stopy $A_1\ B_1$ do průmětny $\pi$. Rovník $\mathcal{R}$ se otočí do kružnice $\mathcal{G}_1$. Kružnice $\mathcal{G}_1$ a elipsa $\mathcal{R}_1$ jsou afinní v pravoúhlé afinitě s osou $A_1\ B_1$ . Pomocí této afinity můžeme na rovníku $\mathcal{R}_0$ najít bod $P_0$ se zadanou zeměpisnou šířkou $\lambda$ a jeho obraz $P1$ na elipse R 1, obr. 4 b).

Průmět M1 poledníku je určen sdruženými průměry $o_1 = P_1{}^S\ P_1{}^j$ a $p_1 = P_1\ O_1$. Přitom $p_1$ je průměr elipsy $\mathcal{R}_1$ a k němu sdružený průměr $q_1$ je rovnoběžný s tečnou $t_1$ elipsy $\mathcal{R}_1$ v bodě $P_1$. Přímka $q_1$ je tedy kolmá na přímku $o_1$ a na přímku $p_1$, tj. $q_1$ je kolmá na rovinu $\mu$ poledníku $\mathcal{M}$ . Stopa $p^\mu$ roviny μ, je kolmá na $q_1$. Elipsu $\mathcal{M}_1$ jsme určili hlavní osou na $p^\mu$ (s vrcholy na $\mathcal{G}_1$) a jedním bodem, např. $P_1{}^S$ nebo $P_1$. Proužkovou konstrukci určíme vedlejší vrcholy elipsy $\mathcal{M}_1$.

## 2.2 Stereografická projekce

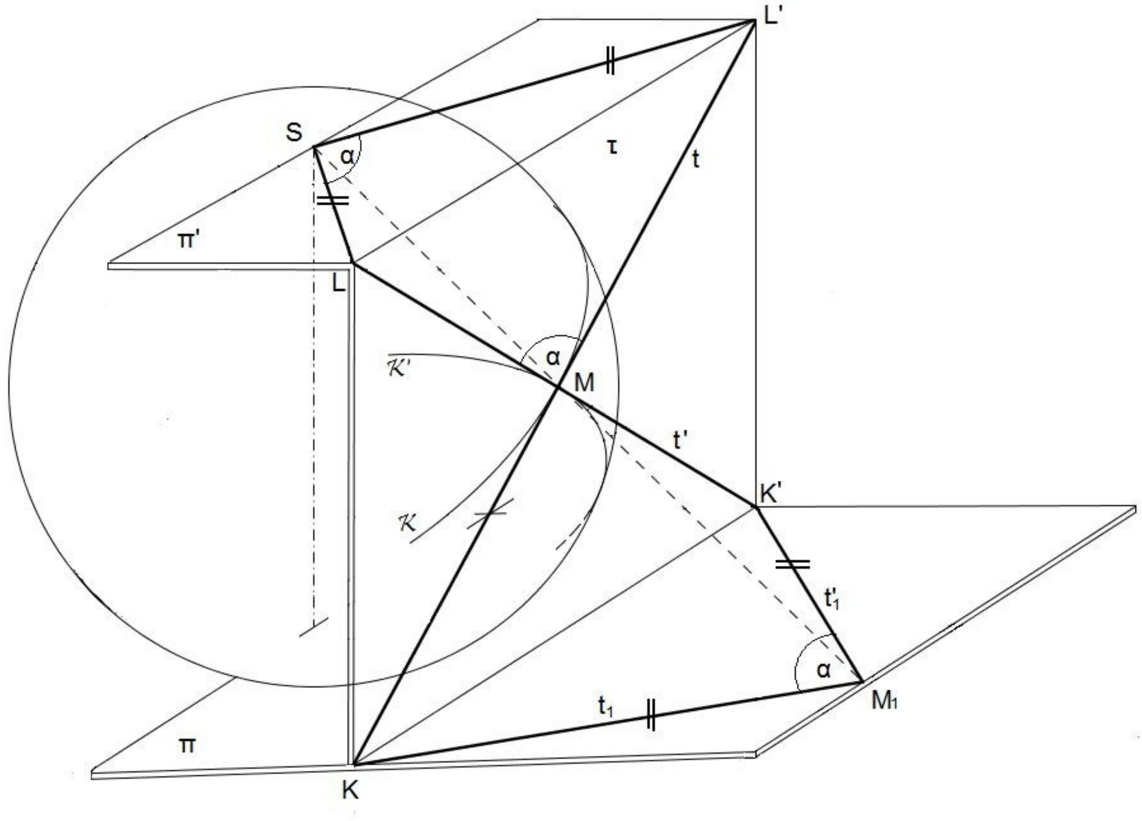
Stereografickou projekci začal používat řecký matematik, geograf a astronom Hipparchos z Nicee, 180-125 př.n.l., který je považován za zakladatele matematického zeměpisu. Kromě toho naučil zeměpisce popisovat body zeměpisnými souřadnicemi.

Stereografická projekce patří do středových promítaní, kde střed $S$ promítání je bodem sféry. Průmětna je rovnoběžně s tečnou rovinou kulové plochy ve středu $S$. Středem $O$ kulové plochy volíme průmětnu $\pi$. Nejdříve si však uvedeme vlastnosti, které obecně platí pro tuto projekci.

V1. **Stereografická projekce zachovává velikost úhlu** a je konformním zobrazením.

Abychom se o tom přesvědčili, provedeme konstrukci: (obr. 4)

Bodem M na sféře zvolíme dvě libovolné křivky $\mathcal{K}$ a $\mathcal{K}'$. Odchylku jejich tečen $t$ a $t'$ označíme $\alpha$ (odchylka tečen určuje úhel, pod kterým se křivky protínají). Rovina $\tau$, která je určena tečnami $t$ a $t'$, je tečnou rovinou sféry v jejím bodě $M$. Rovina $\tau$ protíná roviny $\pi$ a $\pi'$, které jsou vůči sobě rovnoběžné. Bod $S$ náleží na $\pi'$ v rovnoběžných přímkách $KK'$ a $LL'$. Přímky $LM$ a $LS$ jsou tečny sféry ze společného bodu $L$, mají proto stejnou velikost, tj. vzdálenost bodu $L$ od bodů dotyku tečen $LS$ a $LM$ je stejná. To samé platí pro tečny $L'S$ a $L'M$. Trojúhelníky $SLL'$, $MLL'$ jsou shodné. Rovina $SLM$ protíná roviny $\pi$ a $\pi'$ v rovnoběžných přímkách $SL$ a $K'M_1$. Rovina $SL'M$ protíná roviny $\pi$ a $\pi'$ v rovnoběžných přímkách $SL'$ a $KM_1$. Proto trojúhelníky $LL'M$ a $KK'M$ jsou podobné a odchylku přímek $t$, $t'$ je stejná jako odchylka jejich obrazů $t_1$, $t_1'$. Jedná se tedy o konformní zobrazení.



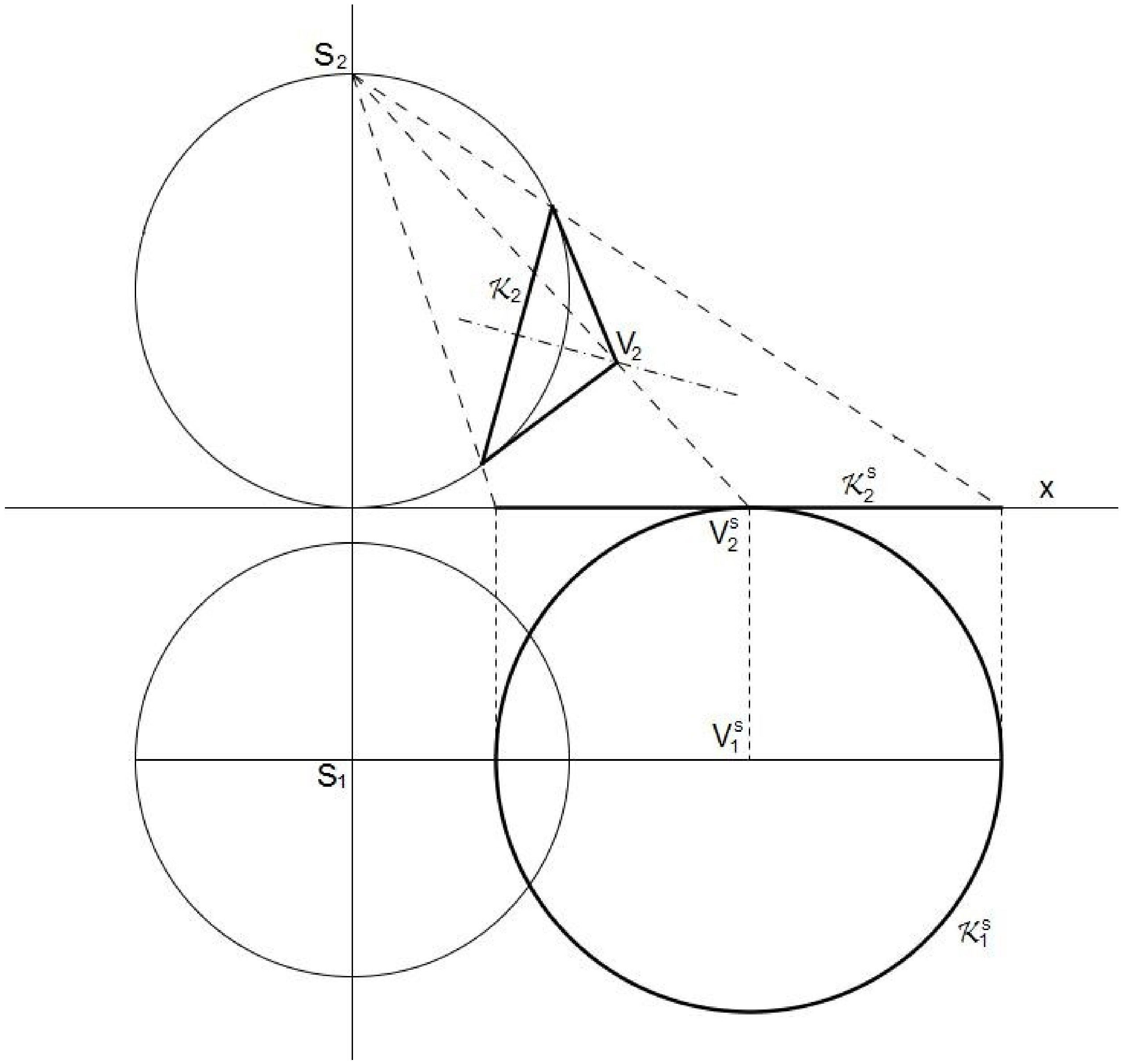

Obr. 4

V2. **Stereografický průmět kružnic, které procházejí středem *S* promítání, jsou přímky.**

Rovina kružnice, která obsahuje střed *S*, je promítací rovinou této kružnice.

V3. **Stereografický průmět kružnice, která neobsahuje střed *S*, je kružnice.**

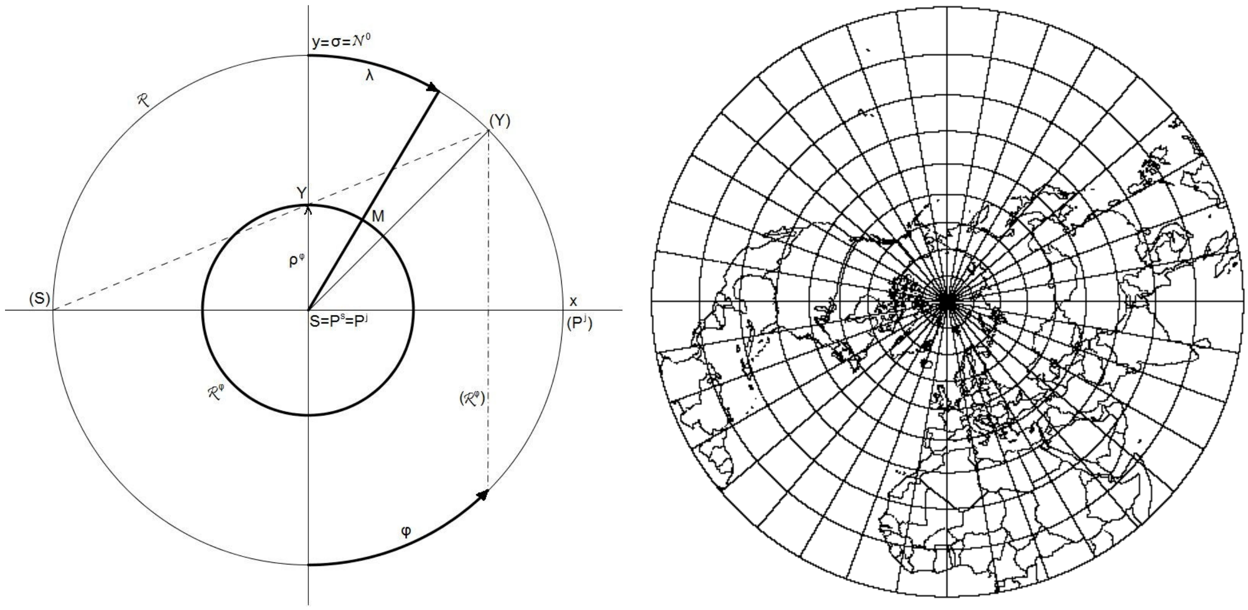
Zvolíme libovolnou kružnici $\mathsf{K}$, $S \notin \mathsf{K}$. Podél kružnice se sféry dotýká rotační kuželová (resp. rotační válcová) plocha. Površky dotykové kuželové plochy jsou kolmé na tečny kružnice $\mathsf{K}$, obr. 5. Již jsme dokázali, že stereografická projekce je konformním zobrazením. Z toho vyplývá, že průmětny tečen kružnice $\mathsf{K}$ jsou kolmé na průměty površek kužele. Protože stereografický průmět kružnice $\mathsf{K}$ je kuželosečka, je to kružnice.




Obr. 5

### 2.2.1 Normální stereografická projekce

Nejjednoduším typem stereografického zobrazení je právě normální. Střed *S* promítání je severní (nebo jížní) pól. Průmětnu položíme do roviny rovníku R . Poledníky procházejí středem promítání, takže se promítají do poloměrů. Průmět nultého poledníku svírá s průmětem libovolného poledníku úhel, který odměříme jako zeměpisnou délku na rovníku R . Rovnoběžky se promítají do soustředných kružnic o středu *S*. Abychom je určili, sklopíme rovinu nultého poledníku do průmětny. Pravoúhlým průmětem rovnoběžky $R^{\varphi}$ do roviny σ je úsečka ($R^{\varphi}$), kterou sestrojíme sklopením roviny $\sigma$. Ze sklopeného středu (*S*) promítáme sklopené rovnoběžky ($R^{\varphi}$ ) do roviny $\sigma$, obr. 6.




Obr. 6

Poloměr $\rho^\varphi$ obrazu rovnoběžky o šířce $\varphi$ vypočteme z trojúhelníku $(S)SY$ (úhel při vrcholu $(S)$ je obvodový úhel příslušný ke středovému úhlu $\sphericalangle(Y)S(P^j) = (\pi/2 - \varphi)$ .

$$(1) \qquad \rho^\varphi = r \operatorname{tg} (\pi/4 - \varphi/2) .$$

Potom pro souřadnice obrazu platí $M_1 = [\ \rho^\varphi \sin \lambda;\ \rho^\varphi \cos \lambda]$, kde kartézskou soustavu souřadnic volíme jako na obr. 6.

Rovnice loxodromy na kulové ploše, tj. křivky, která protíná poledníky kulové plochy pod konstantním úhlem, je:

$$\lambda = \pm \operatorname{tg} \alpha \,.\, \ln \operatorname{tg} (\pi/4 - \varphi/2)$$

$$(2) \qquad \Rightarrow \operatorname{tg} (\ \pi 4 - \varphi 2\ ) = e^{\pm \lambda \operatorname{cotg} \alpha.}$$

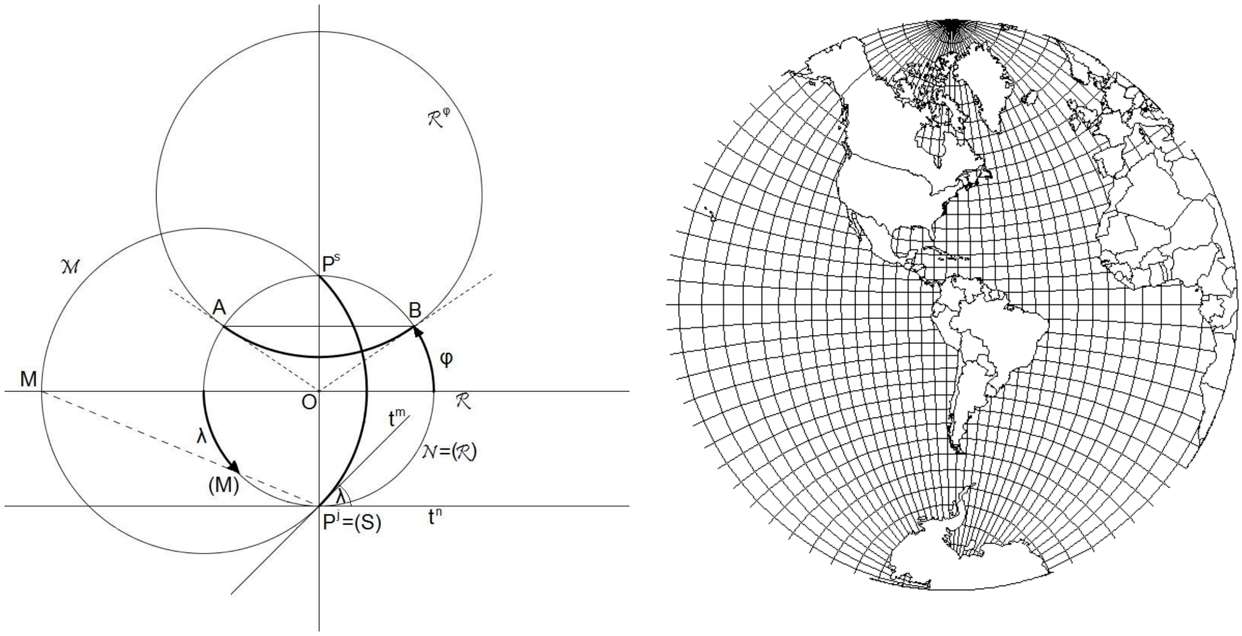
Jestliže (2) dosadíme do (1), je

$$\rho\varphi = r\, e^{\pm \lambda \operatorname{cotg} \alpha}$$

rovnice logaritmické spirály. Loxodromy se v normální stereografické projekci promítají do logaritmických spirál.

### 2.2.2 Příčná stereografická projekce

V příčné stereografické projekci volíme střed S promítání jako libovolný bod na rovníku. Průmětna prochází středem $O$ kulové plochy, průnik kulové plochy s průmětnou je kružnice N. Podobně jako v příčné ortografické projekci leží severní a jižní pól na kružnici N. Rovník se promítá do přímky $p$ procházející středem $O$ sféry. Průmětem poledníků (kromě toho, který prochází středem $S$) jsou kružnice (podle V3) procházející póly $P^{s}$ $P^{j}$. Pro jejich určení tedy stačí vždy jeden bod, např. průsečík $M$ s rovníkem. Ve sklopení roviny rovníku do $\pi$ určíme ve vzdálenosti zeměpisné délky $\lambda$ na rovníku (R) bod ($M$). Ten promítneme z bodu (S) ε (R) do bodu $M$ ε R , obr. 7.




Obr. 7

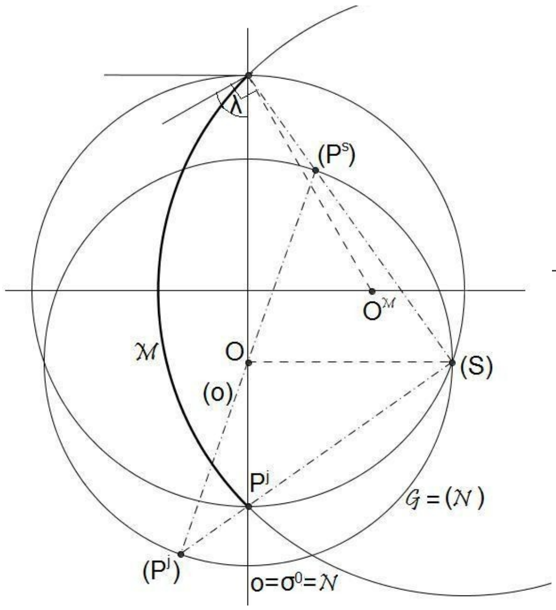
Pro průmět poledníku M můžeme určit tečnu $t_{m}$ v bodě $P$ $j$. Vzhledem ke konformitě zobrazení, je odchylka tečny $t_{m}$ od tečny $t_{n}$ nultého poledníku v pólu $P^{j}$ rovna zeměpisné délce $\lambda$.

Všechny rovnoběžky kolmo protínají poledníky, a tak, vzhledem ke konformitě zobrazení, i průměty rovnoběžek kolmo protínají průměty poledníků. Obraz R $\varphi$ rovnoběžky o zeměpisné šířce $\varphi$ prochází body $A$, $B$, v nichž má tečny $OA$, $OB$.

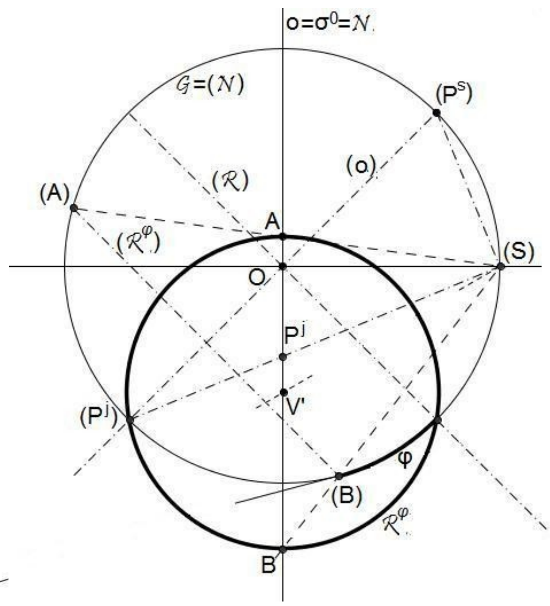
### 2.2.3 Obecná stereografická projekce

U této projekce prochází průmětna $\pi$ středem $O$ sféry a přitom není rovnoběžná s osou $o$ a ani na ni není kolmá. Průnikovou kružnici kulové plochy s průmětnou $\pi$ označíme G, obr. 8 a).

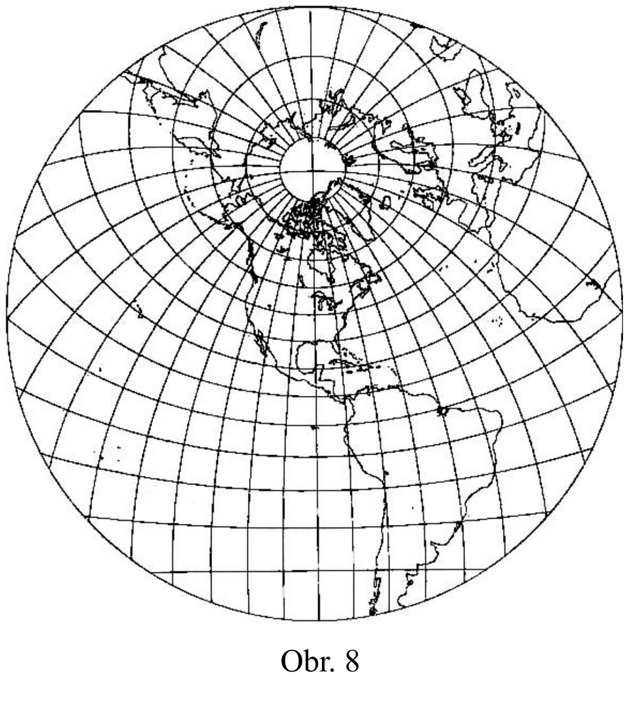
K určení průměty poledníků zvolíme např. průmět severního pólu $P^s$ a určíme obraz jižního pólu sklopením promítací roviny $\sigma^0$ osy $o$. Poledník N v rovině $\sigma^0$ zvolíme jako nultý poledník. Průmět ostatních poledníků jsou kružnice (podle V3) procházející průměty pólů. Známe-li zeměpisnou délku $\lambda$ poledníku M, odměříme ji od nultého poledníku N.




*a)*




*b)*



Obr. 8

Rovnoběžky jsou také kružnice, proto v rovině sklopeného nultého poledníku vyznačíme řezy rovinami rovnoběžek (tětivy kružnice (N) kolmé na osu ($o$)), obr. 8 b). Středové průměty rovnoběžek mají průměr na přímce N (rovnoběžky jsou souměrné podle rovin poledníků). Podél rovnoběžky se sféry dotýká rotační kuželová (nebo rotační válcová) plocha s osou *o*. Středový průmět jejího vrcholu *V* je středem průmětu rovnoběžky.

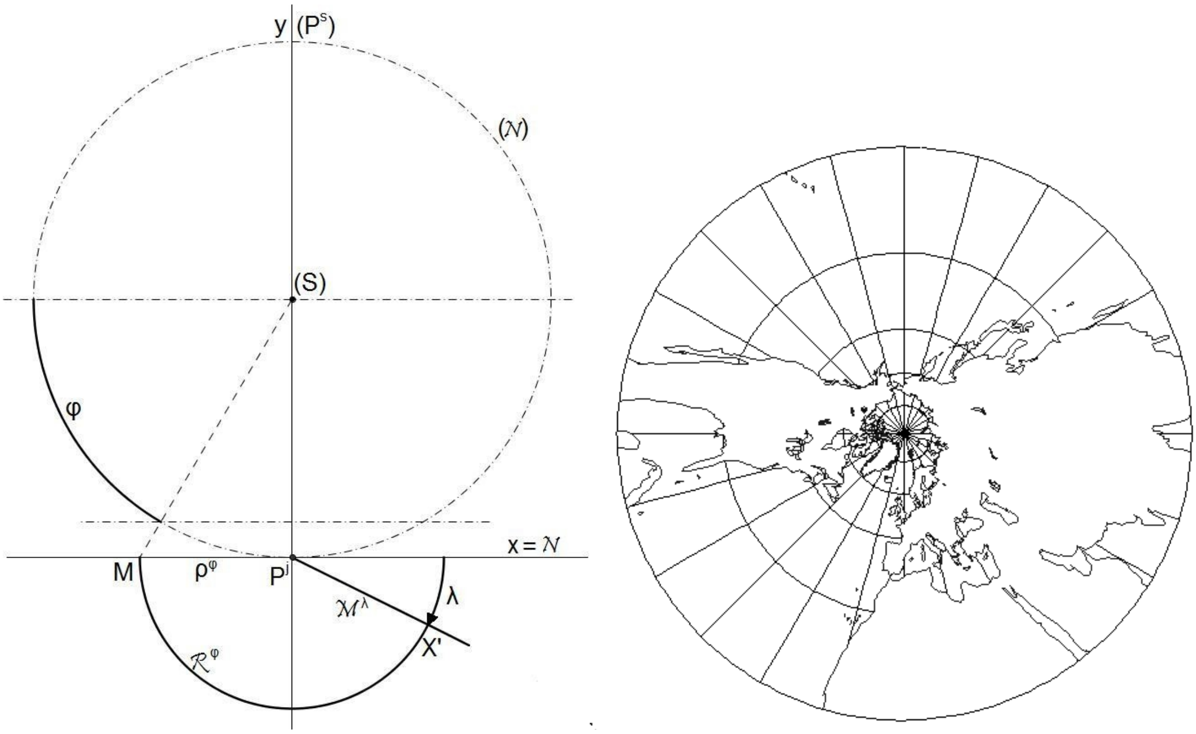
## 2.3 Gnómonická projekce

Při gnómonické projekci se kulová plocha promítá středově ze svého středu nejčastěji na tečnou rovinu. Hlavním znakem je, že průmětem všech poledníků a rovníku jsou přímky, neboť roviny všech hlavních kružnic, poledníků a rovníku jsou promítacími rovinami.

### 2.3.1 Normální gnómonická projekce

Průmětna $\pi$ je v dotykové rovině v jednom z pólů, např. $P^{j}$. Průměty poledníků $\mathsf{M}^{\lambda}$ tvoří svazek přímek o středu $P^{j}$. Rovnoběžkové kružnice $\mathsf{R}^{\varphi}$ jsou v rovinách rovnoběžných s průmětnou $\pi$ a promítají se (kromě rovníku, jehož průmětem je nevlastní přímka) do soustředných kružnic o středu $P^{j}$. Jejich zeměpisné šířky $\varphi$ odměříme ve sklopení na libovolném poledníku, např. $(\mathsf{N})$, obr. 9.

Poloměr průmětu rovnoběžky o zěměpisné šířce je $\rho^{\varphi} = r \operatorname{cotg} \varphi$ (z trojúhelníku $(S)MP^{j}$). Potom $X' = [r \operatorname{cotg} \varphi \cos \lambda; r \operatorname{cotg} \varphi \sin \lambda]$ je průmět libovolného bodu $X$ kulové plochy.




Obr. 9

### 2.3.2 Příčná gnómonická projekce

Průmětna $\pi$ je tečnou rovinou sféry v libovolném bodě $T$ rovníku. Což znamená, že průmětem rovníku je přímka $\mathcal{R}$ , obr. 12. Průměty pólů jsou nevlastní body směru $\mathcal{M}$ kolmého na $\mathcal{R}$ , kde $\mathcal{M}$ je průmět poledníku, jehož rovina je kolmá na $\pi$. Průměty poledníků se tedy promítají kolmo na přímku $\mathcal{R}$ . Podobně jako u příčné stereografické projekce stačí jeden bod $M$ k jejich určení. Bod $M$ tedy najdeme ve sklopení rovníku.

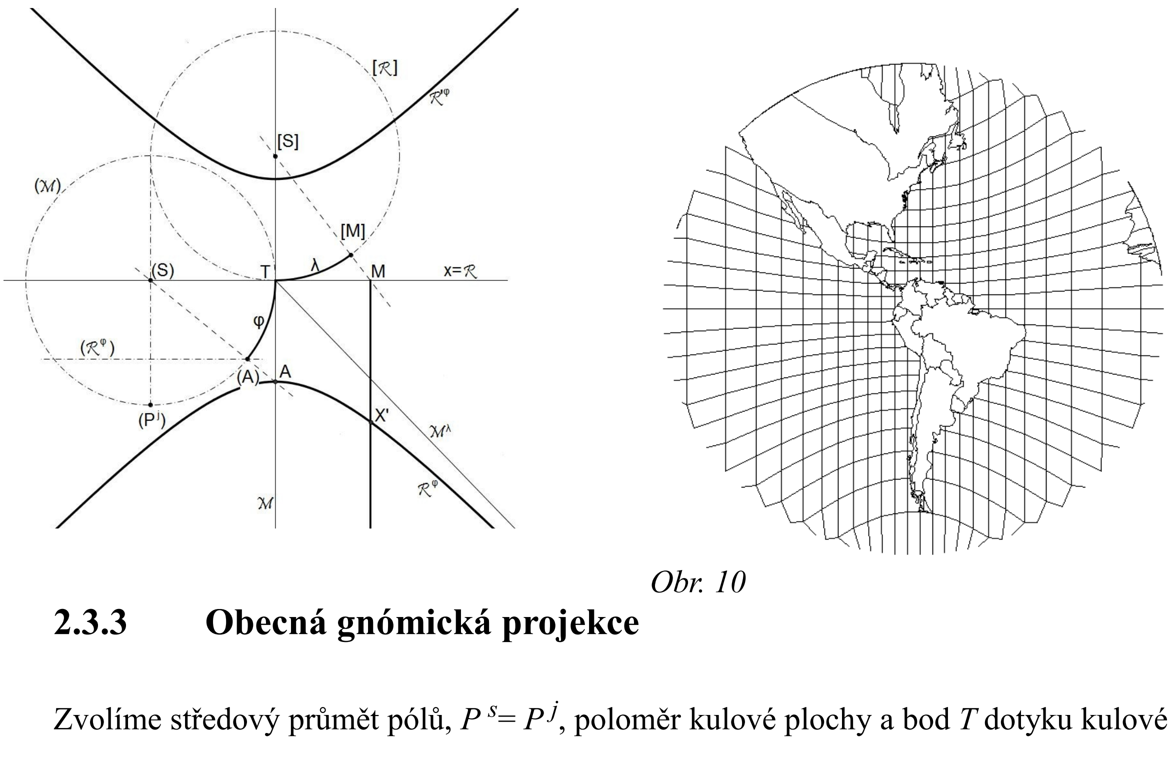
Rovnoběžkové kružnice se promítají do hyperbol se společnou osou $\mathcal{R}$ a společným středem v bodě $T$, neboť na každé rovnoběžce existují dva body (průsečíky s poledníkem $\mathcal{N}$, jehož rovina je rovnoběžná s $\pi$). Zeměpisná šířka $\varphi$ rovnoběžek je rovna odchylce asymptot hyperboly od přímky $\mathcal{R}$ . Ve sklopení poledníku $\mathcal{M}$ najdeme vrcholy hyperbol.

Velikost hlavní poloosy hyperboly (z trojúhelníku $(S)TA$) je $a = r \text{ tg } \varphi$. Směrnice její asymptoty je $\text{tg } \varphi = a/b$ , potom $b = r$. Rovnice průmětů rovnoběžek jsou:

$$(3) \qquad -(x^2/r^2) + y^2/(r^2 tg^2\, \varphi) = 1.$$

Souřadnici $y$ průmětu $X$ vypočteme z (3), když $x = r \text{ tg } \lambda$ (z trojúhelníku $[S]TM$). Potom pro průmět bodu $X = [\varphi\, ; \lambda]$ kulové plochy v příčné gnómonické projekci platí:

$$X' = [r \text{ tg } \lambda\, ; r\, (tg\, \phi/\cos \lambda)].$$

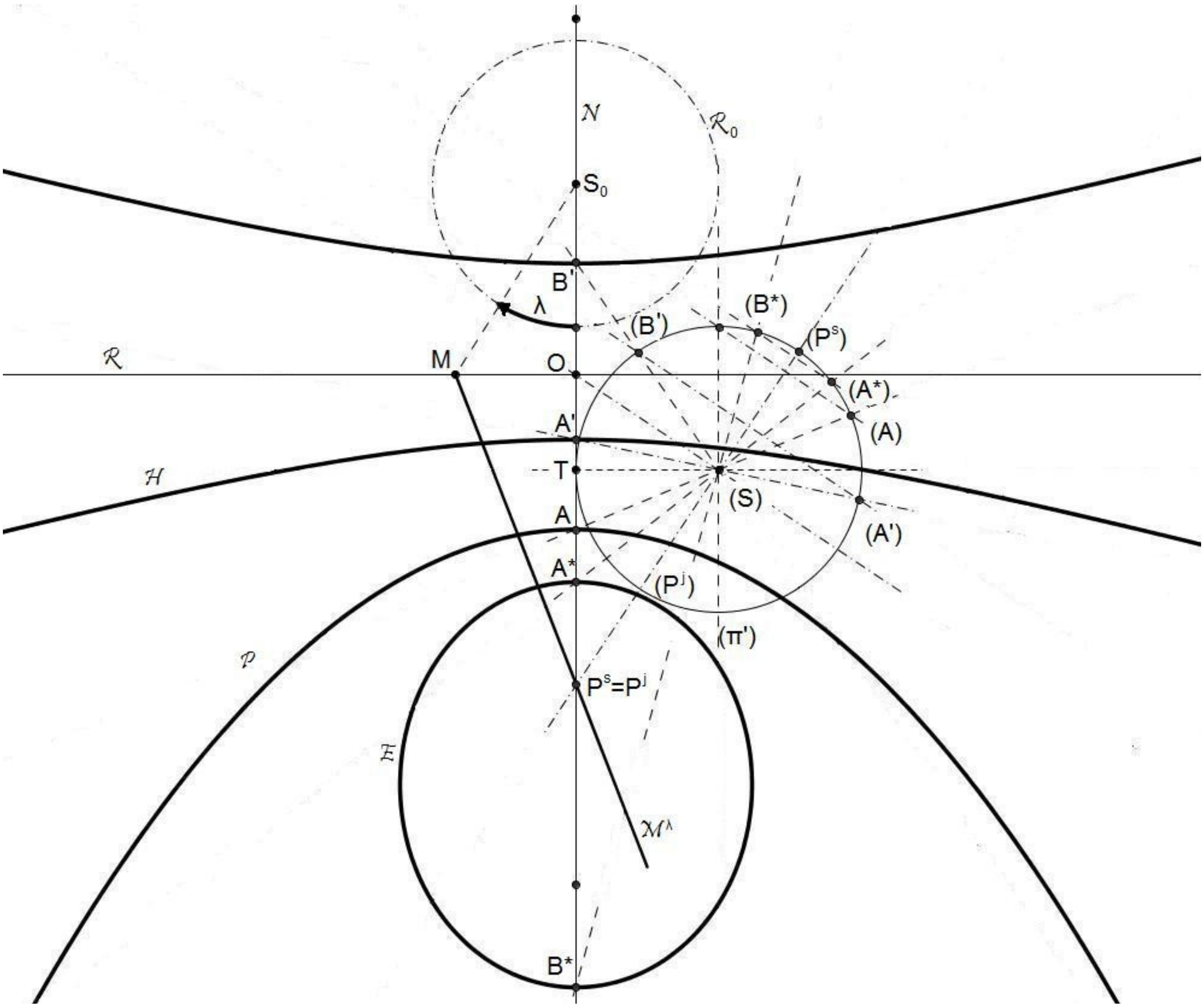



*Obr. 10*

### 2.3.3 Obecná gnómická projekce

Zvolíme středový průmět pólů, $P^s = P^j$, poloměr kulové plochy a bod $T$ dotyku kulové plochy s průmětnou $\pi$. Ze středu kulové plochy promítáme na její tečnou rovinu v bodě T, který není ani pólem ani není bodem rovníku.

Průměty poledníků tvoří svazek přímek o středu $P^s$ a k jejich určení tedy stačí opět jediný bod $M$, např. na rovníku, jehož průmětem je přímka R , obr. 11. Proto otočíme rovinu rovníku kolem její stopy R do průmětny, $|O(S)|$ je poloměr otáčení středu $S$. Na kružnici $R_0$ odměříme zeměpisné délky $\lambda$ poledníků.




Obr. 11

Rovnoběžky se promítají do paraboly P, hyperboly H nebo elipsy E podle toho, zda mají s rovinou $\pi'$ rovnoběžná s $\pi$, $S$ ε $\pi'$, postupně společný jeden bod, dva body nebo žádný bod. Vrcholy těchto průmětů leží na poledníku N (jeho rovina je kolmá na rovinu $\pi$). Jedním ohniskem je bod $P^s = P^j$.

# 3 Závěr

V této ročníkové práci jsem podal přehled všech azimutalních projekcí. Jelikož jde o práci z deskriptivní geometrie, zaměřil jsem se především na jejich  základní konstrukce.

U každého typu zobrazení jsem uvedl vlastnosti, jak se jednotlivé poledníky a rovnoběžníky promítají do průmětny. U některých projekcí jsem dokonce odvodil i jejich zobrazovací rovnice, které jsou nutné k hledání určitých bodů. U všech zmiňovaných projekcí jsem uvedl jejich aplikaci (pro lepší představu jak jednotlivé mapy budou vypadat).

# 4 Zdroje


[1] Černý J., Kočandrlová M.: *Konstruktivní geometrie,* ČVUT, 2004

[2] http://cs.wikipedia.org/wiki/Kartografie

[3] http://www.fd.cvut.cz/department/k611/PEDAGOG/files/webskriptum/kartografie/kartografie.html

[4] Kounovský J., Vyčichlo F.: *Deskriptivní geometrie,* Nakladatelství Československé akademie věd, 1959

[5] Medek V., Piska R.: *Deskriptivní geometrie I.,* Nakladatelstí technické literatury, 1972