Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5

ROČNÍKOVÁ PRÁCE

Pravidelný dvanáctistěn

Vypracoval: Miroslav Reinhold
Třída: 4. C
Školní rok: 2011/2012
Seminář: Deskriptivní geometrie

Prohlašuji, že jsem svou ročníkovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10. února 2012 *Miroslav Reinhold*

Obsah

1. Úvod:

V této práci si dávám za cíl ukázat, jak lze narýsovat pravidelný dvanáctistěn v různých promítáních, například v Mongeově promítání a v lineární perspektivě.

Dále bych rád ukázal jiné formy pravidelných dvanáctistěnů a jejich základní vlastnosti.

Tyto pravidelné dvanáctistěny jsou často opomíjeny a v učebnicích se jim nevěnuje příliš prostoru.

Všechna odvození a důkazy jsou prováděny podrobně, aby práce byla srozumitelná všem čtenářům.

Konstrukce jsou pro názornost doplněny obrázky, většina z nich byla vytvořena s využitím aplikace Geogebra4.

K této práci je také vyhotoven dřevěný model dvanáctistěnu jakožto ukázka dokonale vypadajícího třírozměrného tělesa v reálném světě.

2. Pravidelný dvanáctistěn

Pravidelný dvanáctistěn patří mezi takzvaná Platonská tělesa. Termínem Platónská tělesa označujeme pravidelný konvexní mnohostěn, u kterého ze všech vrcholů vychází stejný počet hran a všechny hrany tvoří stejný pravidelný mnohoúhelník. Lze mu vepsat i opsat kružnice. V našem normálním trojrozměrném prostoru existuje pouze pět takových těles a to pravidelný čtyřstěn (tetrahedron), pravidelný šestistěn (hexahedron), pravidelný osmistěn (octahedron), pravidelný dvanáctistěn (dodecahedron) a pravidelný dvacetistěn (icosahedron). Platón všechna tato tělesa považoval za zástupce živlů a dvanáctistěn byl označen jako jsoucno neboli vše co existuje.

Dvanáctistěn je charakterizován dvanácti stěnami, 20 vrcholy a 30 hranami. Je jediným pravidelným mnohostěnem složeným z pětiúhelníků, jeho duálním mnohostěnem je dvacetistěn, který má 20 stěn 12 vrcholů a 30 hran.

Dvanáctistěn je složen z pětiúhelníku jak zvenčí, tak zevnitř.

2.1. Rozměry a obecné vlastnosti dvanáctistěnu

Rád bych zde uvedl několik základních matematických vzorců týkajících se pravidelného dvanáctistěnu:

Poloměr koule opsané se spočítá dle vzorce

$$r_u = a\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1.401258538 \cdot a$$

Kde r_u je poloměr koule opsané a a označuje délku hrany.

Poloměr koule vepsané se spočítá dle vzorce

$$r_i = a\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{11}{10}\sqrt{5}} \approx 1.113516364 \cdot a$$

Kde r_i je poloměr koule vepsané a a označuje délku hrany.

Tyto vzorce mohou být vyjádřeny pomocí zlatého řezu, kde φ označuje zlatý poměr:

$$r_u = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi$$

$$r_i = a\,\frac{\varphi^2}{2\sqrt{3-\varphi}}$$

Plocha pravidelného dvanáctistěnu se spočítá dle následujícího vzorce

$$A = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2 \approx 20.645728807a^2$$

Vzorec pro objem pravidelného dvanáctistěnu

$$V = \frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3 \approx 7.6631189606a^3$$

Délka uhlopříčky strany se spočítá pomocí poměru délky úhlopříčky a strany pětiúhelníku

u/a=(1+√5)/2

kde u označuje délku úhlopříčky a a značí délku hrany.

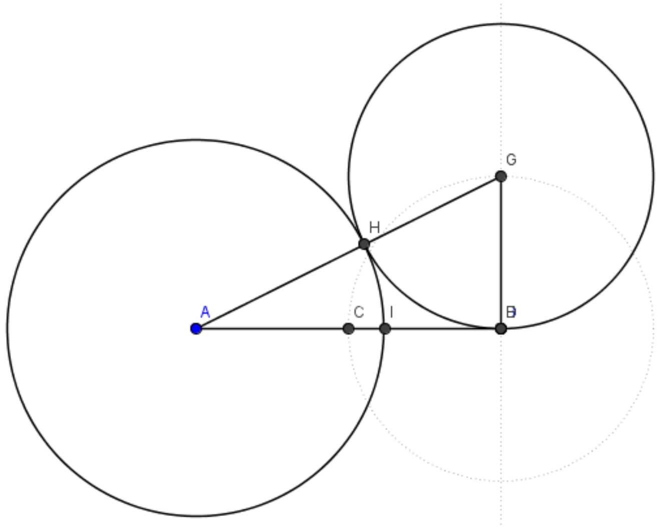
Úhel vzepětí z dvanáctistěnu je 2 arkustangens(φ), což je přibližně 116,5650512 stupňů. Pokud má původní dvanáctistěn délku hrany 1, jeho duální dvacetistěn má délku hrany $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, což je zlatý poměr.

Pokud je všech pět platonických těles postaveno se stejným objemem, dvanáctistěn má nejkratší hrany. Vzdálenost mezi vrcholy na stejné straně, které nejsou připojeny do okraje, je φ, což je hodnota zlatého poměru.

3. Zlatý řez

Zlatý řez znamená rozdělení úsečky na 2 části tak, že poměr větší části ku části menší je rovný poměru celkové délky k větší části úsečky. Jeho velikost je přibližně 1,6180 a konstruuje se několika způsoby. V této práci ukážu pouze jeden postup.

1) Sestrojíme přímku p, která je kolmá k úsečce AB, kde B náleží p
2) Sestrojíme bod G, G náleží p a jeho vzdálenost od B je rovna polovině vzdálenosti bodů A a B
3) Sestrojíme přímku GA
4) Sestrojíme kružnici k s poloměrem rovným vzdálenosti bodů G a B a na jejím průsečíku s přímkou G, čímž vznikne bod H



5) Sestrojíme kružnici l s poloměrem rovným vzdáleností bodů A a H
6) Sestrojíme bod I na průsečíku kružnice l s přímkou AB, který je právě zlatým řezem

3.1 Zlatý řez v Dvanáctistěnu

Každý pravidelný pětiúhelník může být rozdělen na 5 rovnostranných trojúhelníků s úhlem ve vrcholu rovným 72 stupňů a ostatními 54 stupňů a také mu jde vepsat i opsat kružnice. Jeho úhlopříčky se kříží v poměru zlatého řezu a díky tomu je i ve dvanáctistěnu několik zlatých řezů. Zajímavé na dvanáctistěnu je také to, že do něj lze vepsat tři navzájem kolmé zlaté obdélníky a to tak, že jejich vrcholy leží v středech stěn dvanáctistěnu.

4. Dvanáctistěn v historii i současnosti

Platónská tělesa byla objevena v antickém Řecku buď Pythagorem ze Samu nebo Theaitetosem z Athén, prameny se v tomto ohledu rozcházejí. Jisté ale je, že od té doby až do dnes byli stále známé a nezapomnělo se na ně.

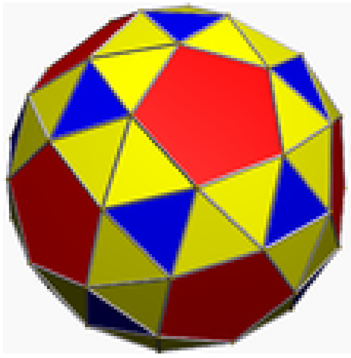
Platón se zabýval dvanáctistěnem ve svém dialogu *Timaios,* kde se snažil vysvětlit fungování světa pomocí svých 5 pravidelných mnohostěnů. Tato tělesa získala označení právě po Platónovi a to hlavně díky tomu, že Platón jako první popsal některé jejich vlastnosti a dostal je do všeobecnějšího povědomí více než jeho předchůdci.

I Johanes Keppler vytvořil model sluneční soustavy s pomocí právě platónských těles. V modelu dal mezi dvě planety vždy jedno těleso a domníval se, že planety obíhají po jeho opsaných a vepsaných kružnicích.

Dvanáctistěn nebyl nikdy v technických oborech výrazněji popisován s výjimkou chemie, kde některé sloučeniny tvoří krystalickou mřížku ve tvaru dvanáctistěnu (např. pyrit). Dvanáctistěn našel své uplatnění zejména v oborech jako je filozofie nebo výtvarné umění. Také mnoho matematiků jej používalo především ve spojení se zlatým číslem. Římané konstruovali dvanáctistěny z bronzu a umisťovali na každý vrchol kouli – tyto tělesa byla nalezena v jejich koloniích, avšak účel těchto dvanáctistěnů není znám.

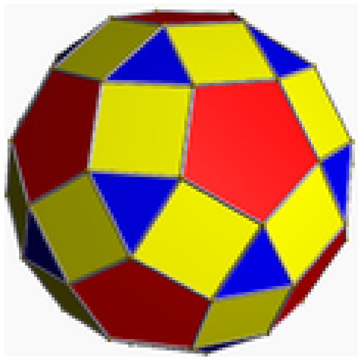
5. Pravidelné modifikace dvanáctistěnu

Dvanáctistěn má mnoho modifikací, které vznikají změnou jeho stran takovým způsobem, aby zůstal stále pravidelný. Většina modifikací má své přesné názvy a popsané i vlastnosti.



Zkosený dodekaedr (viz. obrázek)

Zkosený dodekaedr má 92 stěn z toho je 12 pětiúhelníků a 80 rovnostranných trojúhelníků, dále má 150 hran a 60 vrcholů. Má nejvyšší kulovitý tvar ze všech těles Archimedova tvaru.



Tuto modifikaci dvanáctistěnu lze získat tak, že stěny dvanáctistěnu od sebe oddalujeme tak dlouho, dokud se sebe nepřestanou dotýkat. Poté ve vhodný okamžik propojíme stěny. Tím vznikne Rombokosidodekaedr (rozšířený dvanáctistěn, který je na obrázku hned pod zkoseným dodekaedrem). Pokud dále rotujeme s pětiúhelníky ve vrcholu, tak nám vznikne zkosený dodekaedr.

Objem a plocha zkoseného dodekaedru

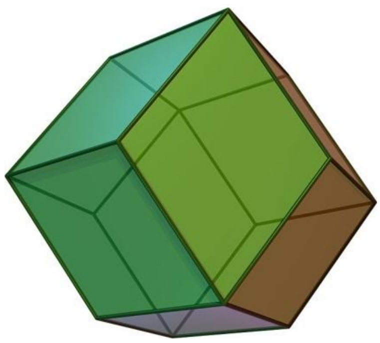
Plocha zkoseného dodekaedru o straně 1 je dána vzorcem

$$A = 20\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \approx 55.28674495844515$$

a objem vypočteme dle vzorce:

$$V = \frac{12\xi^2(3\tau + 1) - \xi(36\tau + 7) - (53\tau + 6)}{6\sqrt{3 - \xi^2}^3} \approx 37.61664996269626$$

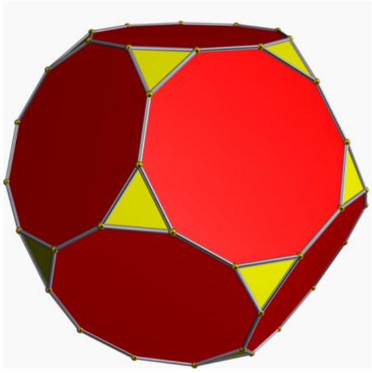
kde τ je zlatý poměr.



Kosočtverečný dvanáctistěn

Kosočtverečný dvanáctistěn má 12 stěn, 24 hran a 12 vrcholů. V přírodě tvoří krystalovou mřížku tohoto tvaru např. český granát.

Rombický dodekaedr (zkrácený dvanáctistěn)



Rombický dodekaedr obsahuje na povrchu 12 pravidelných desetiúhelníků a 20 rovnostranných trojúhelníků. Má 60 vrcholů a 90 hran. Vzniká zkosením hran pravidelného dvanáctistěnu.

Jeho objem se získá pomocí vzorce:

$$V = \frac{5}{12}(99 + 47\sqrt{5})a^3 \approx 85.0396646a^3$$

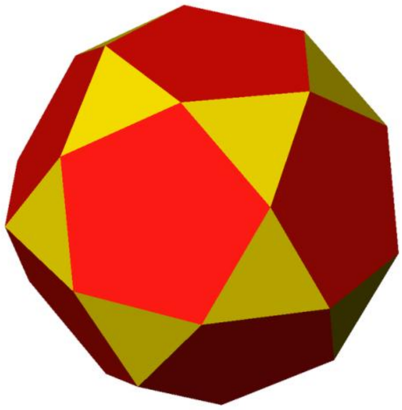
Jeho plocha se spočte dle vzorce:

$$A = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})a^2 \approx 29.3059828a^2$$

Malý hvězdicový dvanáctistěn, velký hvězdicový dvanáctistěn a velký dvanáctistěn jsou také modifikacemi dvanáctistěnu a patří mezi takzvaná Keppler-pointsova tělesa.

U velkého dvanáctistěnu najdeme například 120 symetrií.

Ikosidodekaedr



Ikosidodekaedr má dvacet trojúhelníkových a dvanáct pravidelných pětiúhelníkových ploch na svém plášti, dále pak třicet vrcholů a šedesát stejných hran. Vzniká stejně jako rombický dodekaedr, ale více se mu zmenší hrany. Je to jedno z nejvíce symetrických polo-pravidelných těles.

Jeho plocha se vypočítá dle vzorce:

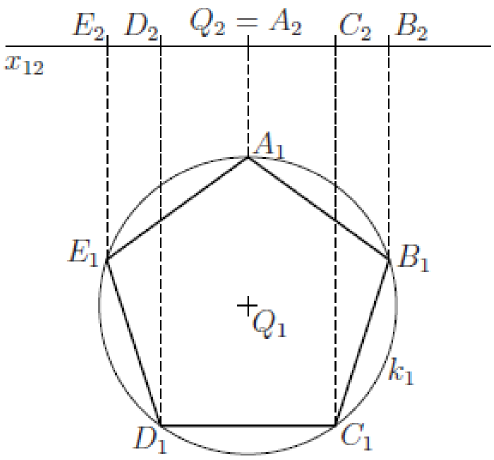
$$A = 5(\sqrt{3} + 6\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})a^2 \approx 100.99076a^2$$

Jeho objem získáme pomocí vzorce:

$$V = \frac{1}{6}(45 + 17\sqrt{5})a^3 \approx 13.8355259a^3.$$

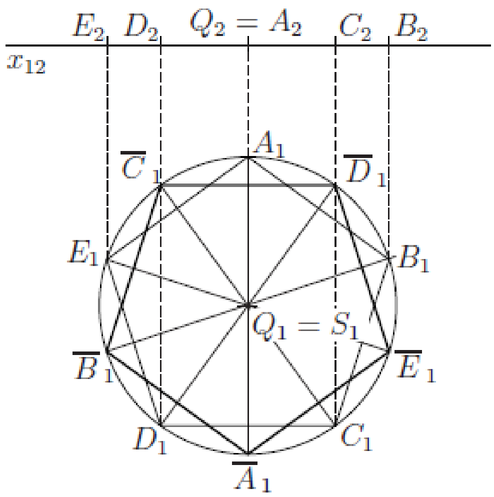
kde a je délka hrany.

6. Konstrukce dvanáctistěnu v Mongeově promítání, při umístění středu na půdorysně



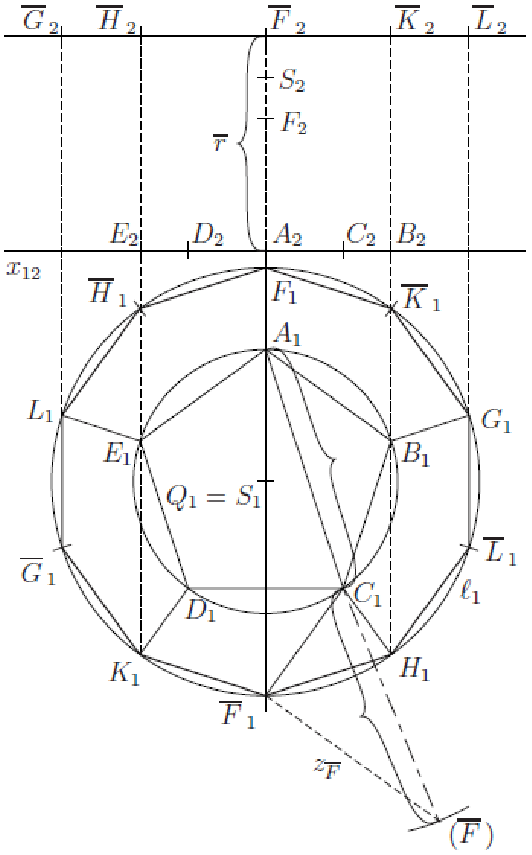
1) Díky tomu, že je pravidelný dvanáctistěn složen z pětiúhelníků, tak při konstrukci nejprve narýsujeme pravidelný pětiúhelník A,B,C,D,E, ke kterému opíšeme kružnici *k*

2) Promítneme body A,B,C,D,E na osu $X_{1,2.}$ V průsečíku úseček D_1, D_2 a C_1,C_2 s kružnicí k nám vzniknou první dva body druhého pětiúhelníku z dvanáctistěnu



3) Sestrojíme pětiúhelník $A_1^{\text{s čarou}}$, $B_1^{\text{s čarou}}$, $C_1^{\text{s čarou}}$,$D_1^{\text{s čarou}}$,$E_1^{\text{s čarou}}$ tak nám vznikne pravidelný desetiúhelník $A_1^{\text{s čarou}}$,D_1, $B_1^{\text{s čarou}}$, E_1, $C_1^{\text{s čarou}}$, A_1, $D_1^{\text{s čarou}}$, B_1, $E_1^{\text{s čarou}}$, $C_{1,}$ který je souměrný podle bodu S_1

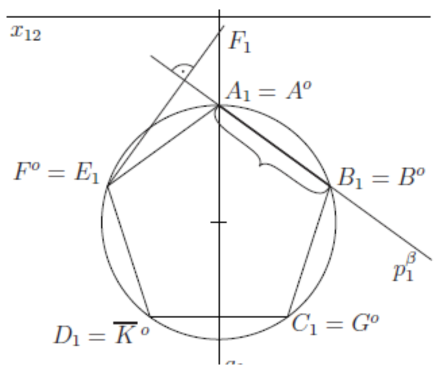
4) Pro zobrazení bodu F, který je vrcholem pravidelného pětiúhelníku AELH$^{\text{s čarou}}$F a jenž je ve vrcholu pravidelného pětiúhelníku ABGK$^{\text{s čarou}}$ F v rovině beta, musíme v rovině gama otočit rovinu beta kolem přímky p_{beta} do půdorysny tak aby pětiúhelník $A_0B_0G_0K_0^{\text{s čarou}}F_0$ splynul s pětiúhelníkem ABCDE tak, že F_0 = E



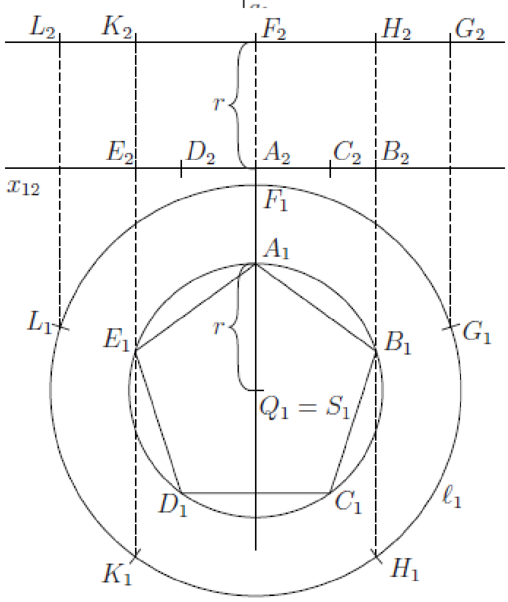
5) Docílíme toho tak, že využijeme pravoúhlé afinity s osou p_1^{beta}, F_1 bude náležet a_1 a F_1F_0 bude kolmá na p_1^{beta}

6) Určíme si zetovou souřadnici bodu F tak, že trojúhelník AF_1F bude stvořen s hranou AF rovnou velikosti pětiúhelníku ABCDE a úhel AF_1F bude pravý. Sestrojíme si bod F a při přesném rýsování nám vyjde, že z_F se rovná vzdálenosti z F_1 do F a to se rovná poloměru kružnice k a to se rovná r

7) Body F_1,G_1,H_1,K_1,L_1 jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice l_1 se středem Q_1 a poloměrem vzdálenosti z Q_1 do F_1



8) Bod F_1 s čarou je souměrný k F_1 podle S_1, Bod $G_1^{\text{s čarou}}$ je souměrný k G_1 podle S_1, Bod $H_1^{\text{s čarou}}$ je souměrný k H_1 podle S_1, Bod $K_1^{\text{s čarou}}$ je souměrný k K_1 podle S_1, Bod L_1 s čarou je souměrný k L_1 podle S_1. Potom jsou body F_1, K_1 s čarou, G_1, $L_1^{\text{s čarou}}$, H_1, F_1 s čarou, K_1, $G_1^{\text{s čarou}}$, L_1, $H_1^{\text{s čarou}}$ vrcholy pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice l_1 a tento desetiúhelník je obrysovou čarou půdorysu dvanáctistěnu.



9) Určíme s zetovou souřadnici bodu F s čarou tak že trojúhelník $CF_1^{\text{s čarou}}$ F bude mít velikost strany $CF^{\text{s čarou}}$ velikosti úsečky AC a úhel $CF_1^{\text{s čarou}}$ F s čarou bude roven devadesáti stupňům.

10) Sestrojíme $F^{\text{s čarou}}$ a pokud dobře rýsujeme, vyjde nám že $z_F^{\text{s čarou}}$ je rovna vzdálenosti z $F_1^{\text{s čarou}}$ do $F^{\text{s čarou}}$ a to je rovno

vzdálenosti $r^{s\ čarou}$ a to je rovno poloměru kružnice l

11) Sestrojíme bod $S_{2,}$ který je středem úsečky $F_2F_2^{s\ čarou}$ a potom bod $A_2^{s\ čarou}$, jenž je souměrný k A_2 podle bodu S_2 a $z_A^{s\ čarou}$ se rovná $r^{s\ čarou}$ + r

12) Dokončíme rys tělesa s jeho viditelností a pokud jsme přesně dodrželi návod, tak výsledkem je identický obrázek jako je v příloze č. 1 i s podrobným postupem konstrukce

6.1. Podrobný postup konstrukce pravidelného dvanáctistěnu v Geogebře v Mongeově promítání a jeho obrázek

Č. Název Definice

1 Bod A

2 Bod B

3 přímka a Přímka vedená A, B

4 Bod C Bod na a

5 přímka b Přímka bodem C kolmo k a

6 Bod S Bod na b

7 Bod A1 Bod na b

8 Kružnice c Kružnice bodem A1 se středem S

9 Bod E1 A1 - otáčením o 72°

10 úhel α Úhel mezi A1, S, E1

11 Pětiúhelník mnohoúhelník1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]

11 Bod D1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]

11 Bod C1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]

11 Bod B1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]

11 úsečka a1 Úsečka [A1, E1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1

11 úsečka e1 Úsečka [E1, D1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1

11 úsečka d Úsečka [D1, C1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1

11 úsečka e Úsečka [C1, B1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1

11 úsečka f Úsečka [B1, A1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1

12 přímka g Přímka bodem E1 kolmo k a

13 přímka h Přímka bodem D1 kolmo k a

14 přímka i Přímka bodem B1 kolmo k a

15 přímka j Přímka bodem C1 kolmo k a

16 Bod E2 Průsečík c, i

17 Bod A2 Průsečík c, b

18 Pětiúhelník mnohoúhelník2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]

18 Bod D2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]

18 Bod C2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]

18 Bod B2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]

18 úsečka g1 Úsečka [A2, E2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka f1 Úsečka [E2, D2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka k Úsečka [D2, C2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka l Úsečka [C2, B2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka m Úsečka [B2, A2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

19 přímka n Přímka vedená A1, B1

20 přímka p Přímka bodem E1 kolmo k n

21 Bod D Průsečík b, p

22 Kružnice q Kružnice bodem D se středem S

23 Bod F Průsečík q, g

24 Bod G Průsečík q, b

25 Mnohoúhelník mnohoúhelník3 Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod H Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod I Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod J Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod K Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod L Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod M Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod N Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod O Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 úsečka e2 Úsečka [F, G] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka g2 Úsečka [G, H] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka r Úsečka [H, I] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka s Úsečka [I, J] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka t Úsečka [J, K] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka b1 Úsečka [K, L] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka c1 Úsečka [L, M] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka d1 Úsečka [M, N] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka h1 Úsečka [N, O] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka i1 Úsečka [O, F] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

26 úsečka j1 Úsečka [A2, G]

27 úsečka k1 Úsečka [E2, I]

28 úsečka l1 Úsečka [D2, K]

29 úsečka m1 Úsečka [C2, M]

30 úsečka n1 Úsečka [B2, O]

31 úsečka p1 Úsečka [N, E1]

32 úsečka q1 Úsečka [D, A1]

33 úsečka r1 Úsečka [B1, J]

34 úsečka s1 Úsečka [C1, H]

35 úsečka t1 Úsečka [D1, F]

36 přímka a2 Přímka bodem N kolmo k a

37 přímka b2 Přímka bodem I kolmo k a

38 Bod E Průsečík a, a2

39 Kružnice c2 Kružnice se středem E a poloměrem Usecka[S, A1]

40 Bod P Průsečík c2, a2

41 přímka d2 Přímka bodem P rovnoběžně k a

42 Bod N3 Průsečík c2, a2

43 Bod F3 Průsečík g, d2

44 Bod D3 Průsečík b, d2

45 Bod H3 Průsečík i, d2

46 Bod J3 Průsečík b2, d2

47 Bod Q Průsečík a, a2

48 Kružnice f2 Kružnice se středem Q a poloměrem Usecka[C1, A1]

49 Bod O3 Průsečík f2, a2

50 přímka h2 Přímka bodem O3 rovnoběžně k a

51 Bod M3 Průsečík g, h2

52 Bod G3 Průsečík b, h2

53 Bod K3 Průsečík i, h2

54 Bod I3 Průsečík b2, h2

55 Bod R Průsečík a, g

56 Bod T Průsečík a, h

57 Bod U Průsečík a, b

58 Bod V Průsečík a, j

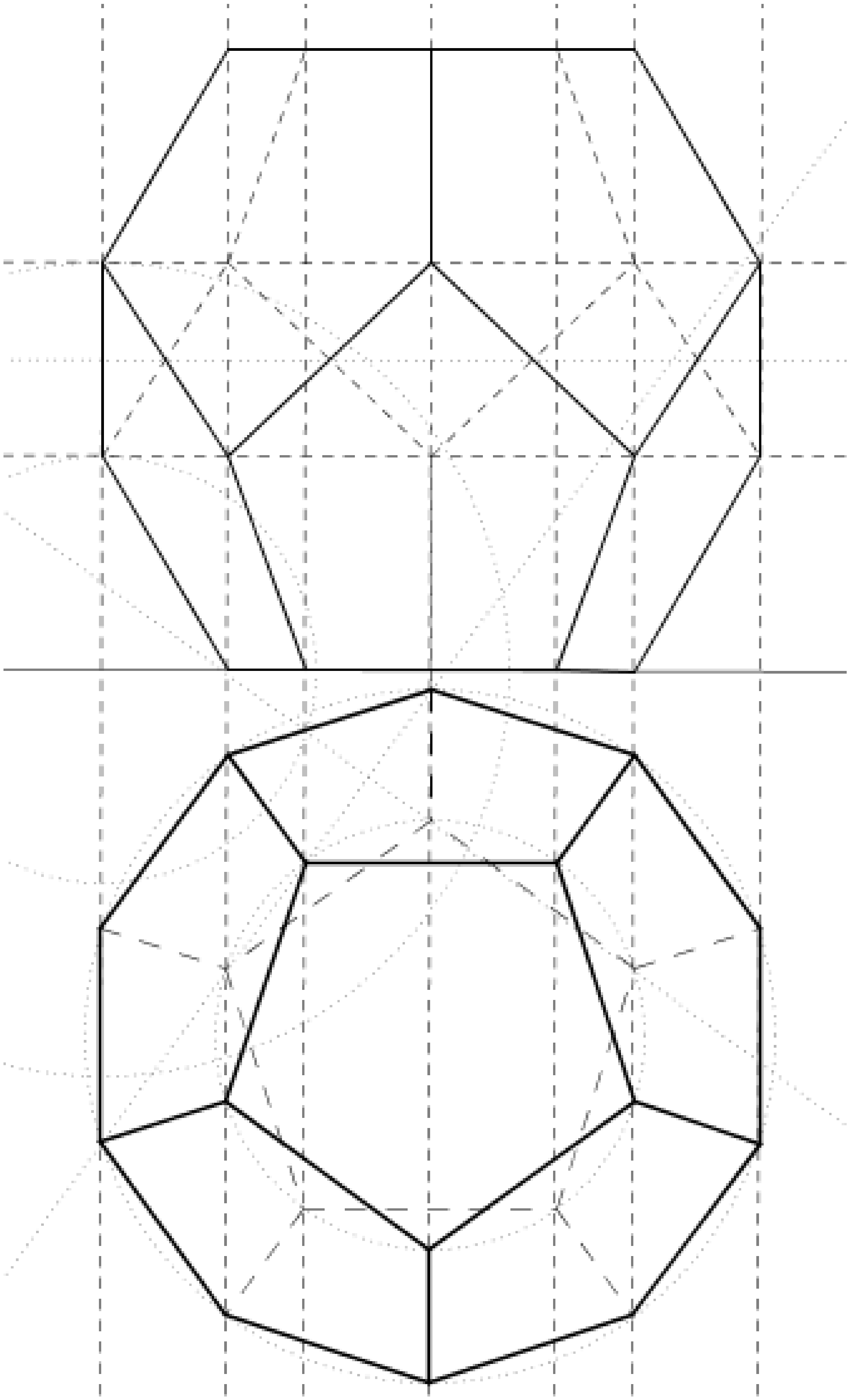
59 Bod W Průsečík a, i

60 Bod S3 Střed G3, D3

61 přímka i2 Přímka bodem S3 rovnoběžně k h2

62 Bod R' obraz R v souměrnosti podle i2

63	Bod T'	obraz T v souměrnosti podle i2
64	Bod U'	obraz U v souměrnosti podle i2
65	Bod V'	obraz V v souměrnosti podle i2
66	Bod W'	obraz W v souměrnosti podle i2
67	přímka j2	Úsečka [O3, N3]
68	přímka k2	Úsečka [I3, J3]
69	přímka l2	Úsečka [W', I3]
70	přímka m2	Úsečka [R', O3]
71	přímka n2	Úsečka [N3, R]
72	přímka p2	Úsečka [J3, W]
73	přímka q2	Úsečka [U', G3]
74	přímka r2	Úsečka [G3, H3]
75	přímka s2	Úsečka [G3, F3]
76	úsečka t2	Úsečka [F3, T]
77	úsečka a3	Úsečka [H3, V]
78	úsečka b3	Úsečka [T, V]
79	úsečka c3	Úsečka [V, W]
80	úsečka d3	Úsečka [T, R]
81	úsečka e3	Úsečka [O3, F3]
82	úsečka f3	Úsečka [H3, I3]
83	úsečka g3	Úsečka [R', W']
84	úsečka h3	Úsečka [N3, M3]
85	úsečka i3	Úsečka [M3, D3]
86	úsečka j3	Úsečka [D3, K3]
87	úsečka k3	Úsečka [D3, D]
88	úsečka l3	Úsečka [M3, T']
89	úsečka m3	Úsečka [K3, V']
90	úsečka a n3	Úsečka [K3, J3]
91	Bod Z	Průsečík a, b2



Řez pravidelného dvanáctistěnu rovinou

Řez rovinou označujeme množinu veškerých bodů společných mnohostěnu a rovině řezu. Rovinný řez může mít více druhů. Prvním druhem je ten, kdy rovina nemá s pravidelným dvanáctistěnem žádný společný bod. Druhým typem řezu je ten, kdy rovina má s pravidelným dvanáctistěnem společnou jedinou hranu, takzvanou styčnou rovinu. Třetím typem je ta, kdy pravidelný dvanáctistěn má s rovinou společný jen jediný vrchol. Čtvrtým typem je že rovna má s dvanáctistěnem společnou stěnu takzvaná hraniční rovina a pátým typem je stav, kdy nastává kombinace předchozích možností. Strany dvanáctistěnu, v kterých roviny řeže dvanáctistěn, zobrazíme jako úsečky společné rovině řezu a stěnám dvanáctistěnu. Můžeme pokračovat i tak, že najdeme vrcholy tohoto řezu dvanáctistěnu jako průsečíky hran s rovinou řezu.

Roviny řezu se nejlépe konstruují, pokud jsou roviny řezu kolmé na některou z průměten.

Postup konstrukce pravidelného dvacetistěnu v perspektivě

Pomocí hlavního bodu a distančníku si z půdorysu přeneseme do perspektivy celý půdorys. Potom pomocí kolmic dále přenášíme vzdálenosti. Dále si sestrojíme výšku příslušnou k bodu, který chceme sestrojit a ty propojíme s hlavním bodem. Pomocí něho ji přeneseme na přímky kolmé. Níže je vypsán podrobný postup konstrukce celé perspektivy v programu Geogebra4

1 Bod B
2 Bod A
3 Přímka a Přímka vedená A, B
4 Bod C Bod na a
5 Přímka b Přímka bodem C kolmo k a
6 Bod S Bod na b
7 Bod A1 Bod na b
8 Kružnice c Kružnice bodem A1 se středem S
9 Bod E1 A1 - otáčením o 72°
10 §hel α Úhel mezi A1, S, E1
11 Pětiúhelník mnohoúhelník1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]
11 Bod D1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]
11 Bod C1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]
11 Bod B1 Mnohouhelnik[A1, E1, 5]
11 úsečka a1 Úsečka [A1, E1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1
11 úsečka e1 Úsečka [E1, D1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1
11 úsečka d Úsečka [D1, C1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1
11 úsečka e Úsečka [C1, B1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1
11 úsečka f Úsečka [B1, A1] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník1
12 Přímka g bodem E1 kolmo k a
13 Přímka h bodem D1 kolmo k a
14 Přímka i bodem B1 kolmo k a
15 Přímka j bodem C1 kolmo k a
16 Bod E2 Průsečík c, i
17 Bod A2 Průsečík c, b
18 Pětiúhelník mnohoúhelník2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]
18 Bod D2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]
18 Bod C2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]
18 Bod B2 Mnohouhelnik[A2, E2, 5]
18 úsečka g1 Úsečka [A2, E2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka f1 Úsečka [E2, D2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka k Úsečka [D2, C2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka l Úsečka [C2, B2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

18 úsečka m Úsečka [B2, A2] náležející útvaru: Pětiúhelník mnohoúhelník2

19 Přímka n Přímka vedená A1, B1

20 Přímka p Přímka bodem E1 kolmo k n

21 Bod D Průsečík b, p

22 Kružnice q Kružnice bodem D se středem S

23 Bod F Průsečík q, g

24 Bod G Průsečík q, b

25 Mnohoúhelník mnohoúhelník3 Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod H Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod I Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod J Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod K Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod L Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod M Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod N Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 Bod O Mnohouhelnik[F, G, 10]

25 úsečka e2 Úsečka [F, G] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka g2 Úsečka [G, H] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka r Úsečka [H, I] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka s Úsečka [I, J] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka t Úsečka [J, K] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka b1 Úsečka [K, L] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka c1 Úsečka [L, M] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka d1 Úsečka [M, N] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka h1 Úsečka [N, O] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

25 úsečka i1 Úsečka [O, F] náležející útvaru: Mnohoúhelník mnohoúhelník3

26 úsečka j1 Úsečka [A2, G]

27 úsečka k1 Úsečka [E2, I]

28 úsečka l1 Úsečka [D2, K]

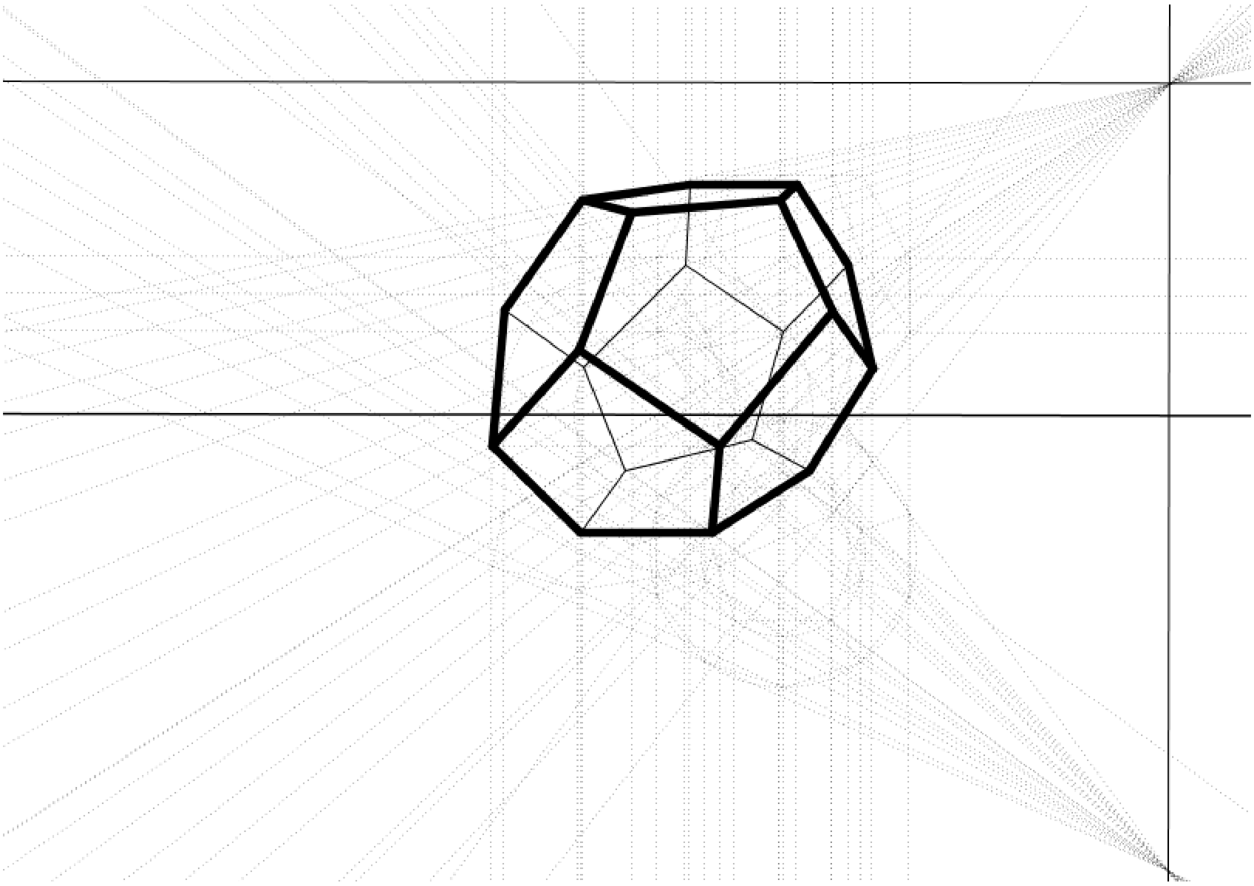
29 úsečka m1 Úsečka [C2, M]

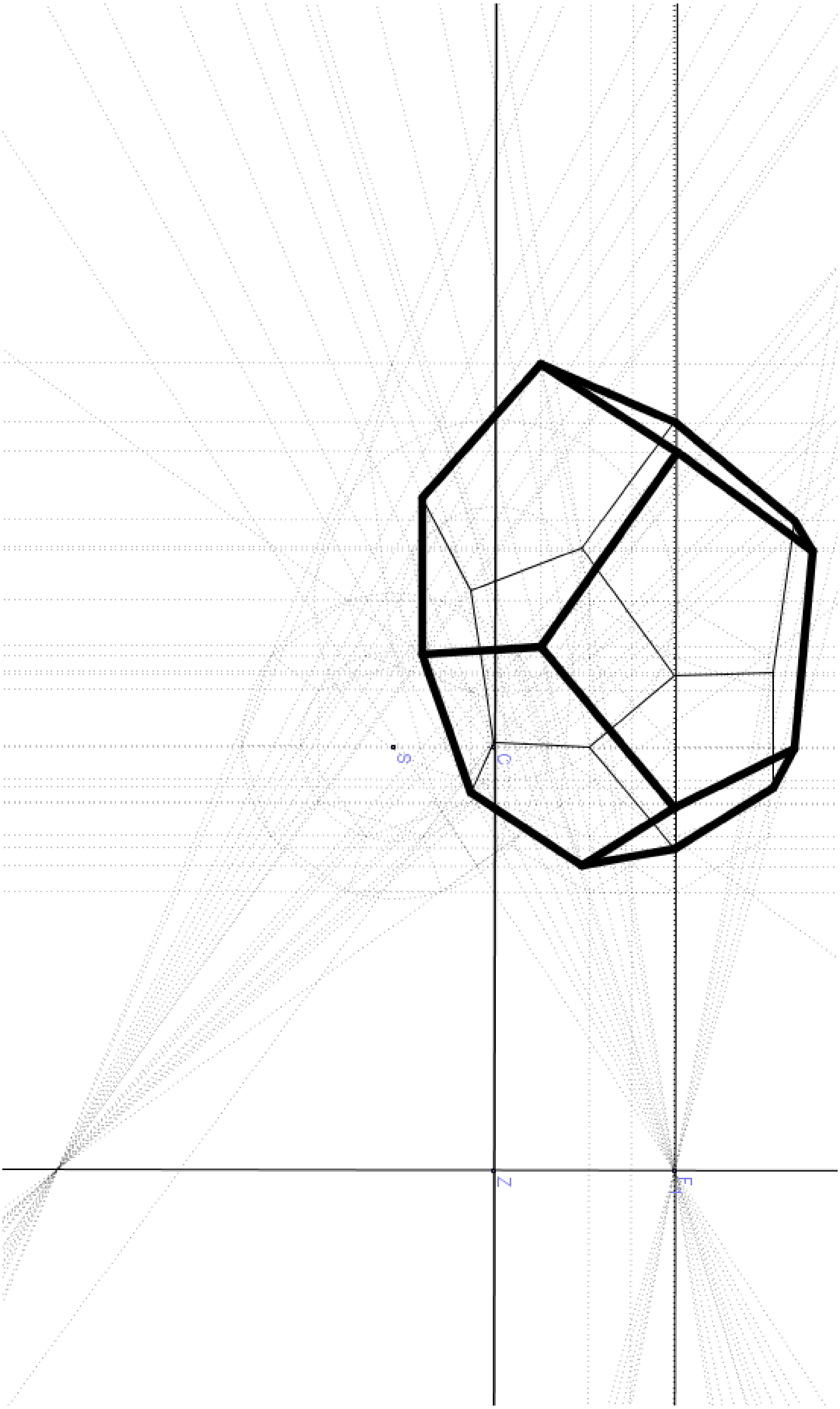
30 úsečka n1 Úsečka [B2, O]
31 úsečka p1 Úsečka [N, E1]
32 úsečka q1 Úsečka [D, A1]
33 úsečka r1 Úsečka [B1, J]
34 úsečka s1 Úsečka [C1, H]
35 úsečka t1 Úsečka [D1, F]
36 Přímka a2 Přímka bodem N kolmo k a
37 Přímka b2 Přímka bodem I kolmo k a
38 Bod E Průsečík a, a2
39 Kružnice c2 Kružnice se středem E a poloměrem úsečky [S, A1]
40 Bod P Průsečík c2, a2
41 Přímka d2 Přímka bodem P rovnoběžně k a
42 Bod N3 Průsečík c2, a2
43 Bod F3 Průsečík g, d2
44 Bod D3 Průsečík b, d2
45 Bod H3 Průsečík i, d2
46 Bod J3 Průsečík b2, d2
47 Bod Q Průsečík a, a2
48 Kružnice f2 Kružnice se středem Q a poloměrem Usecka[C1, A1]
49 Bod O3 Průsečík f2, a2
50 Přímka h2 Přímka bodem O3 rovnoběžně k a
51 Bod M3 Průsečík g, h2
52 Bod G3 Průsečík b, h2
53 Bod K3 Průsečík i, h2
54 Bod I3 Průsečík b2, h2
55 Bod R Průsečík a, g
56 Bod T Průsečík a, h
57 Bod U Průsečík a, b
58 Bod V Průsečík a, j
59 Bod W Průsečík a, i
60 Bod S3 Střed G3, D3
61 Přímka i2 Přímka bodem S3 rovnoběžně k h2
62 Bod R' obraz R v souměrnosti podle i2
63 Bod T' obraz T v souměrnosti podle i2
64 Bod U' obraz U v souměrnosti podle i2
65 Bod V' obraz V v souměrnosti podle i2
66 Bod W' obraz W v souměrnosti podle i2
67 úsečka j2 Úsečka [O3, N3]
68 úsečka k2 Úsečka [I3, J3]
69 úsečka l2 Úsečka [W', I3]
70 úsečka m2 Úsečka [R', O3]
71 úsečka n2 Úsečka [N3, R]
72 úsečka p2 Úsečka [J3, W]
73 úsečka q2 Úsečka [U', G3]
74 úsečka r2 Úsečka [G3, H3]
75 úsečka s2 Úsečka [G3, F3]
76 úsečka t2 Úsečka [F3, T]
77 úsečka a3 Úsečka [H3, V]
78 úsečka b3 Úsečka [T, V]
79 úsečka c3 Úsečka [V, W]
80 úsečka d3 Úsečka [T, R]
81 úsečka e3 Úsečka [O3, F3]
82 úsečka f3 Úsečka [H3, I3]
83 úsečka g3 Úsečka [R', W']
84 úsečka h3 Úsečka [N3, M3]
85 úsečka i3 Úsečka [M3, D3]

86	úsečka j3	Úsečka [D3, K3]
87	úsečka k3	Úsečka [D3, D]
88	úsečka l3	Úsečka [M3, T']
89	úsečka m3	Úsečka [K3, V']
90	úsečka n3	Úsečka [K3, J3]
91	Bod Z	Bod na a
92	Přímka p3	Přímka bodem Z kolmo k a
93	Bod F1	Bod na p3
94	Přímka q3	Přímka bodem F1 kolmo k p3
95	Bod G1	Průsečík a, a2
96	Bod H1	Průsečík a, b2
97	Přímka r3	Přímka vedená F1, G1
98	Přímka s3	Přímka vedená F1, R
99	Přímka t3	Přímka vedená T, F1
100	Přímka a4	Přímka vedená F1, U
101	Přímka b4	Přímka vedená V, F1
102	Přímka c4	Přímka vedená W, F1
103	Přímka d4	Přímka vedená H1, F1
104	Přímka e4	Přímka vedená K, J
105	Bod I1	Průsečík c4, e4
106	Bod J1	Průsečík d4, e4
107	Bod K1	Průsečík p3, e4
108	Přímka f4	Přímka vedená K1, I
109	Přímka g4	Přímka vedená K1, H
110	Přímka h4	Přímka vedená K1, G
111	Přímka i4	Přímka vedená K1, F
112	Přímka j4	Přímka vedená K1, O
113	Přímka k4	Přímka vedená K1, N
114	Přímka l4	Přímka vedená K1, M
115	Bod L1	Průsečík d4, f4
116	Bod M1	Průsečík c4, g4
117	Bod N1	Průsečík a4, h4
118	Bod O1	Průsečík s3, i4
119	Bod P1	Průsečík r3, j4
120	Bod Q1	Průsečík r3, k4
121	Bod R1	Průsečík s3, l4
122	Přímka m4	Přímka vedená D, K1
123	Bod S1	Průsečík a4, m4
124	úsečka n4	Úsečka [S1, I1]
125	úsečka p4	Úsečka [I1, J1]
126	úsečka q4	Úsečka [J1, L1]
127	úsečka r4	Úsečka [J1, L1]
128	úsečka s4	Úsečka [M1, L1]
129	úsečka t4	Úsečka [N1, M1]
130	úsečka a5	Úsečka [O1, N1]
131	úsečka b5	Úsečka [O1, P1]
132	úsečka c5	Úsečka [P1, Q1]
133	úsečka d5	Úsečka [Q1, R1]
134	úsečka e5	Úsečka [R1, S1]
135	Přímka f5	Přímka vedená K1, E2
136	Přímka g5	Přímka vedená K1, B1
137	Bod T1	Průsečík c4, g5
138	Bod U1	Průsečík c4, f5
139	Přímka h5	Přímka vedená C1, K1
140	Přímka i5	Přímka vedená K1, D2
141	Bod V1	Průsečík b4, i5
142	Bod W1	Průsečík b4, h5
143	Přímka j5	Přímka vedená K1, A2
144	Přímka l5	Přímka vedená A1, K1
145	Bod Z1	Průsečík a4, l5

146	Bod F2	Průsečík a4, j5
147	Přímka m5	Přímka vedená D1, K1
148	Přímka n5	Přímka vedená C2, K1
149	Bod G2	Průsečík t3, m5
150	Bod H2	Průsečík t3, n5
151	Přímka p5	Přímka vedená K1, B2
152	Přímka q5	Přímka vedená K1, E1
153	Bod I2	Průsečík s3, q5
154	Bod J2	Průsečík s3, p5
155	úsečka r5	Úsečka [G2, W1]
156	úsečka s5	Úsečka [W1, T1]
157	úsečka t5	Úsečka [T1, Z1]
158	úsečka a6	Úsečka [Z1, I2]
159	úsečka b6	Úsečka [I2, G2]
160	úsečka c6	Úsečka [J2, H2]
161	úsečka d6	Úsečka [H2, V1]
162	úsečka e6	Úsečka [V1, U1]
163	úsečka f6	Úsečka [U1, F2]
164	úsečka g6	Úsečka [F2, J2]
165	Přímka k5	Přímka bodem F2 kolmo k a
166	Přímka m6	Přímka vedená F1, W'
167	Přímka n6	Přímka vedená F1, V'
168	Přímka p6	Přímka vedená F1, U'
169	Přímka q6	Přímka vedená F1, T'
170	Přímka r6	Přímka vedená F1, R'
171	Bod K2	Průsečík k5, p6
172	Přímka h6	Přímka bodem U1 kolmo k b3
173	Bod L2	Průsečík m6, h6
174	Přímka i6	Přímka bodem V1 kolmo k b3
175	Bod M2	Průsečík n6, i6
176	Přímka j6	Přímka bodem J2 kolmo k a
177	Bod N2	Průsečík r6, j6
178	Přímka k6	Přímka bodem H2 kolmo k a
179	Bod O2	Průsečík q6, k6
180	úsečka l6	Úsečka [N2, K2]
181	úsečka s6	Úsečka [K2, L2]
182	úsečka t6	Úsečka [L2, M2]
183	úsečka a7	Úsečka [O2, M2]
184	úsečka b7	Úsečka [O2, N2]
185	Přímka c7	Přímka bodem M1 kolmo k b3
186	Přímka d7	Přímka bodem O1 kolmo k a
187	Přímka e7	Přímka bodem Q1 kolmo k a
188	Přímka f7	Přímka bodem J1 kolmo k a
189	Přímka g7	Přímka bodem S1 kolmo k b3
190	Přímka h7	Přímka vedená F1, J3
191	Bod P2	Průsečík f7, h7
192	Přímka i7	Přímka vedená F1, H3
193	Bod Q2	Průsečík f5, c7
194	Přímka j7	Přímka vedená D3, F1
195	úsečka k7	Úsečka [Q2, P2]
196	Bod R2	Průsečík r3, e4
197	úsečka l7	Úsečka [R2, P2]
198	Přímka m7	Přímka vedená F3, F1
199	Bod S2	Průsečík p5, d7

200	úsečka n7	Úsečka [S2, Q2]
201	Přímka p7	Přímka vedená F1, N3
202	Bod T2	Průsečík e7, p7
203	úsečka q7	Úsečka [R2, T2]
204	úsečka r7	Úsečka [S2, T2]
205	úsečka s7	Úsečka [S2, G2]
206	úsečka t7	Úsečka [Q2, W1]
207	úsečka a8	Úsečka [P2, T1]
208	úsečka b8	Úsečka [D3, Z1]
209	úsečka c8	Úsečka [T2, I2]
210	Přímka d8	Přímka bodem N1 kolmo k a
211	Přímka e8	Přímka bodem P1 kolmo k a
212	Přímka f8	Přímka bodem R1 kolmo k a
213	Přímka g8	Přímka bodem I1 kolmo k a
214	Přímka h8	Přímka bodem L1 kolmo k a
215	Přímka i8	Přímka vedená F1, I3
216	Bod U2	Bod na i8
217	Přímka j8	Přímka vedená F1, K3
218	Bod V2	Průsečík g8, j8
219	Přímka k8	Přímka vedená F1, G3
220	Bod W2	Průsečík n5, d8
221	Přímka l8	Přímka vedená F1, M3
222	Bod Z2	Průsečík f8, l8
223	Přímka m8	Přímka vedená F1, O3
224	Bod A3	Průsečík e8, m8
225	úsečka n8	Úsečka [W2, Q2]
226	úsečka p8	Úsečka [U2, Q2]
227	úsečka q8	Úsečka [U2, P2]
228	úsečka r8	Úsečka [V2, P2]
229	úsečka s8	Úsečka [L2, U2]
230	úsečka t8	Úsečka [M2, V2]
231	úsečka a9	Úsečka [D3, V2]
232	úsečka b9	Úsečka [D3, Z2]
233	úsečka c9	Úsečka [Z2, O2]
234	úsečka d9	Úsečka [Z2, T2]
235	úsečka e9	Úsečka [T2, A3]
236	úsečka f9	Úsečka [A3, N2]
237	úsečka g9	Úsečka [A3, S2]
238	úsečka h9	Úsečka [S2, W2]
239	úsečka i9	Úsečka [W2, K2]




S
C
Z
F1

Závěr:

Tato práce dle mého názoru splňuje z veliké části cíle, které do ní byly vkládány. Postup konstrukce pravidelného dvanáctistěnu v perspektivě i v Mongeově promítání je popsán do největších detailů tak, aby bylo možné zkonstruovat pravidelný dvanáctistěn i bez znalosti deskriptivní geometrie. Toto je možné díky podrobnému postupu z programu Geogebra 4.

Různé tipy dvanáctistěnů zde jsou také popsány v hojné míře a jejich obecné vlastnosti nám pomohou se v nich lépe orientovat.

Dřevěný model dvanáctistěnu, který je sestrojen jako doplněk k této práci, pomůže při prezentaci práce k názorné ukázce vlastností pravidelného dvanáctistěnu.

Literatura:

[1] http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka4.html

[2] https://socv2.nidm.cz/archiv31/getWork/hash/8c80397e-7bac-102c-aea7-001e6886262a

[3] http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron

[5] http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka.html

[6] http://www.kjmaclean.com/Geometry/dodecahedron.html

[7] http://yalepress.yale.edu/yupbooks/excerpts/robbin_shadows.pdf

[8] http://www.goldennumber.net/geometry.htm

[9] http://maths.cz/clanky/platonska-telesa.html

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_dodecahedron

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Pentakis_dodecahedron

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Snub_dodecahedron

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Expansion_(geometry)

[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_dodecahedron

[15] Pomykalová Eva: Deskriptivní geometrie pro střední školy, ISBN 978-80-7196-400-1, Prometheus, Praha

[16] J. Švercl - Technické kreslení a deskriptivní geometrie, ISBN 80-7183-297-9, Scentia, Praha