Gymnázium Christiana Dopplera

# Kinematická geometrie


Autor: Vojtěch Šimeček

Třída: 4.C

Školní rok: 2011/2012

Zadavatel: Mgr. Ondřej Machů

Ročníkovou práci jsem zhotovil samostatně, pouze s pomocí zdrojů dále uvedených.

# Obsah

# Úvod

Práce se bude zabývat převážně rovinnými útvary získanými pohybem.

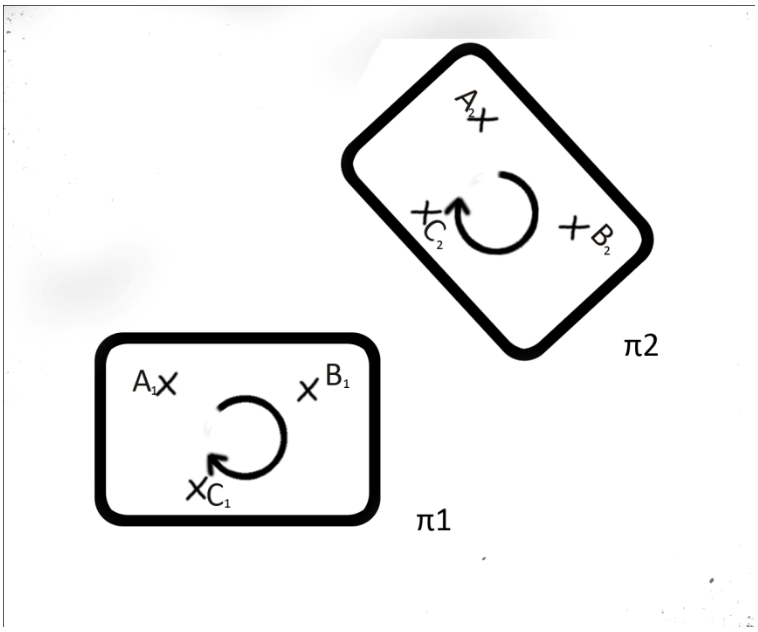
Cykloidy mají mnoho využití, také proto jsem se rozhodl zabývat se tímto tématem.

# Definice a věty důležité pro kinematickou geometrii

1) **Neproměnná rovinná soustava** je rovinné pole, které je jako neproměnný celek podrobeno pohybu.

Rovinné pole značí souhrn všech bodů v rovině, a jelikož můžeme každý rovinný útvar definovat jako množinu bodů v rovině, můžeme pod pojem rovinné pole zahrnout všechny útvary dané roviny, proto ještě upřesním, co je to neproměnný celek.

Na obrázku vidíme dvě různé polohy pohybujícího se rovinného pole $\pi_1$ a $\pi_2$. Bodům $A_1$, $B_1$, $C_1$, … první polohy pole $\pi$ jsou přiřazeny body $A_2$, $B_2$, $C_2$, … druhé




polohy $\pi_2$ pole $\pi$. Aby bylo pole $\pi$ při pohybu neproměnné, musí se vzdálenost jakýkoliv dvou bodů v $\pi_1$ rovnat vzdálenosti bodů v $\pi_2$ odpovídajících (čili $|A_1B_1|=|A_2B_2|$ atd.). Z toho vyplývá, že dva odpovídající si trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ ve dvou polohách $\pi_1$ a $\pi_2$ neproměnné rovinné soustavy $\pi$ mají stejnou orientaci (orientace je v obrázku vyznačena šipkou)

2) V kinematické geometrii se zabýváme křivkami, které při pohybu tvoří body neproměnné rovinné soustavy $\pi$. Body nemusí opisovat křivku – při rotaci je střed rotace neměnný a tak opisuje bod. Při translaci bod opisuje přímku.

Křivka, kterou při pohybu neproměnné rovinné soustavy opíše libovolný její bod, se nazývá **trajektorie pohybu**.

## 1. základní věta kinematiky v rovině

Jsou-li dvě různé polohy $\pi_1$ a $\pi_2$ neproměnné rovinné soustavy $\pi$, pak existuje rotace nebo translace, která přemisťuje $\pi_1$ v $\pi_2$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\pi_1$ a $\pi_2$ jsou dvě různé polohy neproměnné rovinné soustavy $\pi$. $\pi_1$ a $\pi_2$ nemohou mít společné dva body, protože pak by byly totožné. Vezměme si body $A_1$, $A_2$ a $B_1$, $B_2$. Pokud $B_1 \neq B_2$ , pak mhou nastat dva případy: buď $A_1 = A_2$, nebo $A_1 \neq A_2$

Pro $A_1 \neq A_2$: existují osy úseček $A_1A_2$ a $B_1B_2$ a ty mohou být a) různoběžné, b) rovnoběžné nebo c) totožné. Pro a) se osy protínají v bodě S, kde trojúhelníky $SA_1B_1$ a $SA_2B_2$ jsou shodné a mají stejnou orientaci. Z toho plyne, že existuje otáčení, které přemístí úsečku $A_1B_1$ v úsečku $A_2B_2$ (otáčí se o úhel $A_1SA_2$ a střed otáčení je v S). Pro případ b) platí, že $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ a existuje rovnoběžník $A_1B_1B_2A_2$. Existuje tedy translace, která přemístí úsečku $A_1B_1$ v úsečku $A_2B_2$ (posouvá se o orientovanou úsečku $A_1A_2$). Může se také stát, že přímky $A_1B_1$ a $A_2B_2$ jsou totožné a žádný rovnoběžník netvoří, ale i tehdy tato translace existuje. A nakonec pro případ c) existuje buď rotace o 180° (pro případ, že $A_1B_2 = A_2B_1$) nebo translace ve směru kolmém na obě úsečky a tyto čtyři body tvoří obdélník.

**Z této věty vychází:**

Jsou-li $\pi_1$ a $\pi_2$ dvě polohy neproměnné rovinné soustavy $\pi$, pak poloha $\pi_2$ je jednoznačně určena, známe-li polohu dvou jejích různých bodů $A_2$, $B_2$ odpovídajících bodům $A_1$, $B_1$ soustavy $\pi_1$.

Jsou-li $\pi_1$ a $\pi_2$ dvě polohy neproměnné rovinné soustavy $\pi$, pak osy úseček $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, … procházejí pevným bodem S (může být nevlastní).

Pohyb neproměnné soustavy $\pi$ je určen, známe-li trajektorie $\tau_A$ a $\tau_B$ dvou bodů A, B nenulové úsečky AB. – Jednoduché zdůvodnění: z trajektorií se můžeme dozvědět polohy bodů A a B v každém čase, a dle výše popsané věty je každá poloha jednoznačně určena.

V každém okamžiku pohybu procházejí normály k trajektoriím pevným bodem (může být nevlastní). Tento pevný bod se nazývá okamžitý střed otáčení.

## 2. základní věta kinematiky v rovině:

Každý pohyb neproměnné rovinné soustavy (kromě rotace a translace) lze převést na valení hybné polodie **h** po pevné polodii **p**.

Pevnou polodii **p** tvoří všechny okamžité středy otáčení neproměnné rovinné soustavy $\pi$.

Hybnou polodii **h** tvoří všechny body neproměnné rovinné soustavy $\pi$, které se při jejím pohybu stanou okamžitým středem otáčení.

# Cyklický pohyb

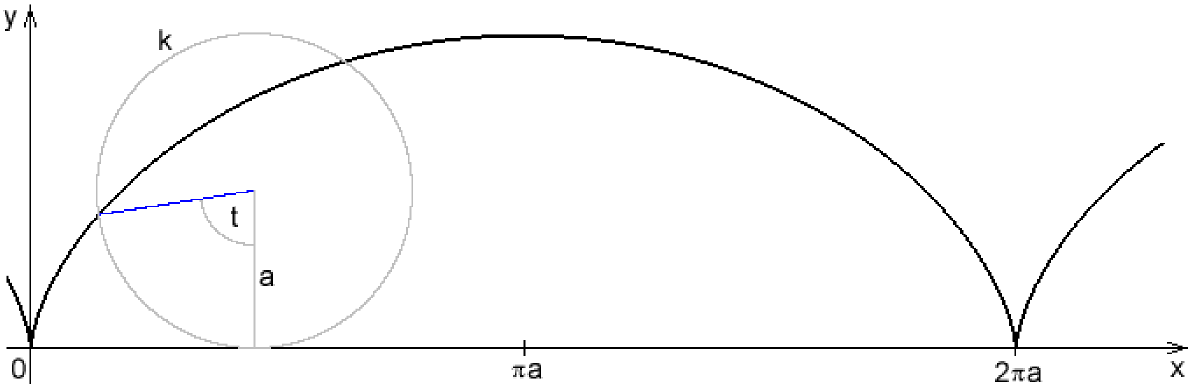
Pohyb při kterém jsou poloidy buď kružnicí nebo přímkou (dvě přímky nelze) se nazývá cyklický pohyb. Trajektorie bodů neproměnné rovinné soustavy se při cyklickém pohybu nazývají **cyklické křivky**.

## Cykloida

Cykloida je cyklická křivka, která je trajektorií bodu pevně spojeného s kružnicí, valící se po přímce.

### Prostá cykloida

Pokud bod pevně spojený s kružnicí leží na jejím obvodu, pak při valení této kružnice po přímce opisuje tento bod **prostou** (obecnou, obyčejnou) cykloidu.




Prostou cykloidu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi

$x = a\,(t - sint)$

$y = a\,(1 - cost)$

### Zkrácená cykloida, prodloužená cykloida.

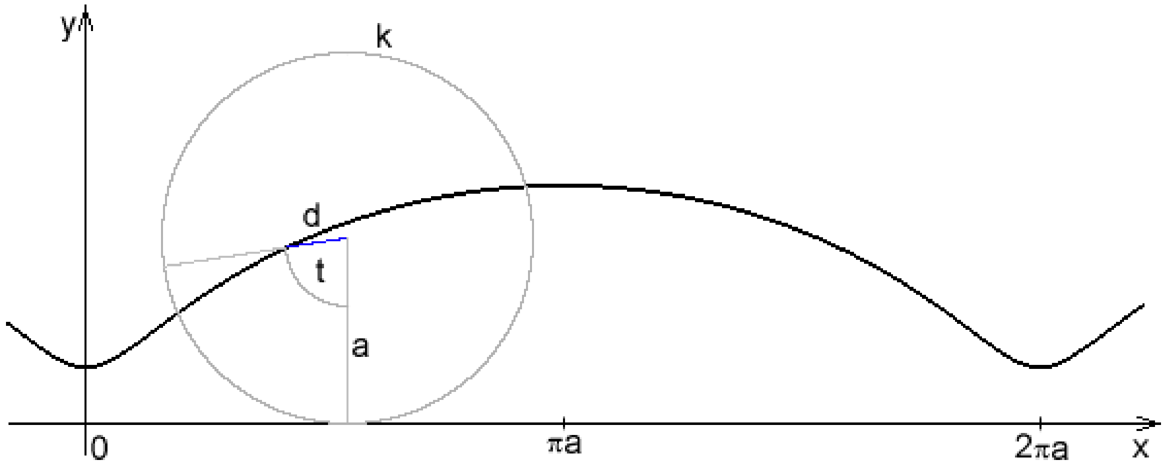
Pokud bod pevně spojený s valící se kružnicí neleží na obvodu této kružnice, ale jeho vzdálenost od středu kružnice (o poloměru a) je d, pak pro d < a získáme cykloidu zkrácenou a pro d > a cykloidu prodlouženou.

Parametrické rovnice zkrácené, resp. prodloužené cykloidy lze zapsat ve tvaru

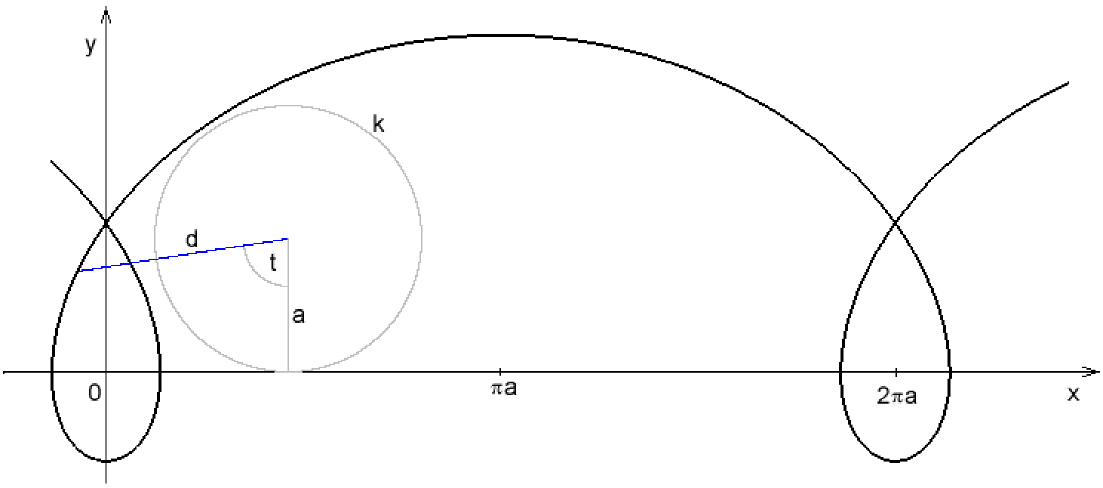
$x = a.t - d.sint$

$y = a - d.cost$

**Zkrácená cykloida**




**Prodloužená cykloida**



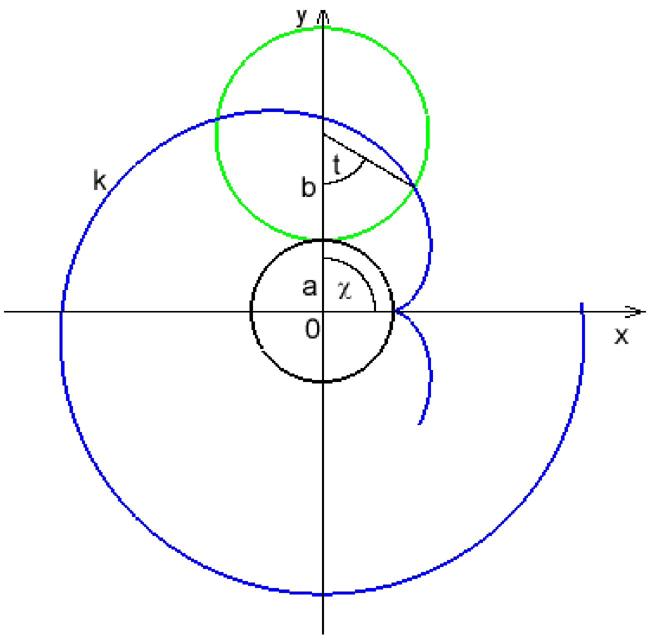

Tečna k cykloidě je konstruována tak, že v bodě cykloidy (A) vedeme kolmici k úsečce SA, kde S je okamžitý střed otáčení (bod, kde se polodie dotýkají)

# Epicykloida

Epicykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí svou vnější stranou po vnější straně nehybné kružnice.

## Prostá epicykloida

Pokud bod pevně spojený s kružnicí leží na jejím obvodu, pak při valení této kružnice kolem kružnice opisuje tento bod prostou (obecnou, obyčejnou) epicykloidu.




Parametrickou rovnici prosté epicykloidy lze zapsat jako

$$x = (a + b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) - b * \cos\left(\frac{a + b}{a}t\right)$$

$$y = (a + b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - b * \sin\left(\frac{a + b}{a}t\right)$$

kde a je poloměr pevné kružnice, b je poloměr hybné kružnice a t je úhel odvalení

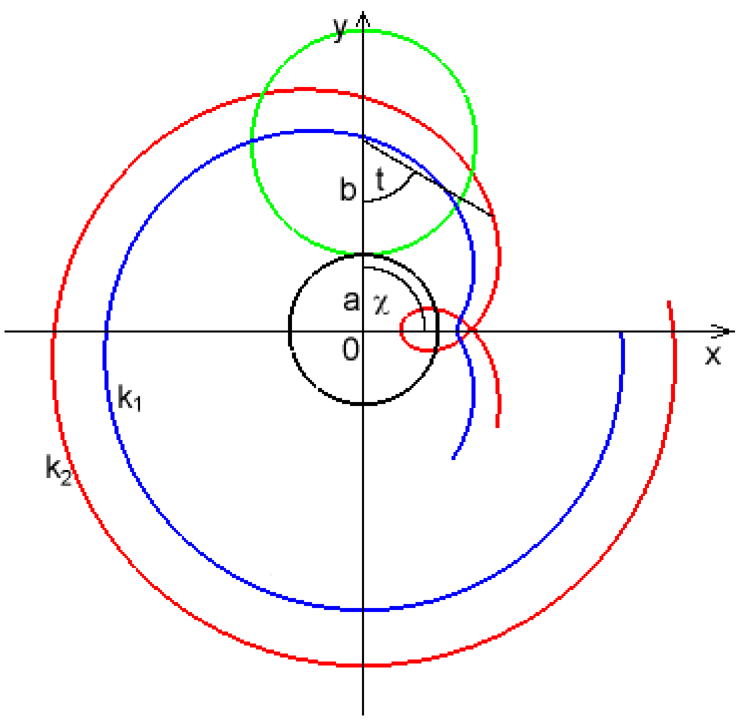
Pro charakter epicykloidy je důležitý poměr a/b:

Je-li a/b=m celé číslo, pak je epicykloida uzavřená křivka s m větvemi, které vzniknou při jednom oběhu hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li a/b racionální číslo p/q, pak je epicykloida uzavřená křivka s p větvemi, které vzniknou při q obězích hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li a/b iracionální číslo, pak je epicykloida neuzavřená křivka s nekonečně mnoha větvemi.

## Zkrácená, prodloužená epicykloida




Trajektorie bodů pevně spjatých k valené kružnici se také liší v závislosti na vzdálenosti od středu kružnice. Pokud je bod uvnitř kružnice, jedná se o zkrácenou epicykloidu (na obrázku modře); pokud je vně kružnice, jedná se o prodlouženou epicykloidu (na obrázku červeně).

Parametrické vyjádření zkrácené i prodloužené epicykloidy:

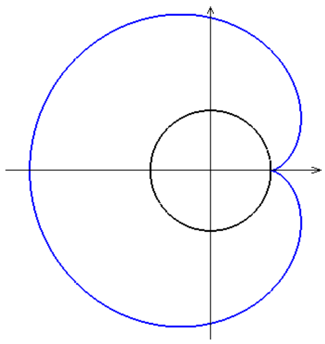
$$x = (a+b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) - d * \cos\left(\frac{a+b}{a} * t\right)$$

$$y = (a+b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d * \sin\left(\frac{a+b}{a} * t\right)$$

Kde d je vzdálenost pozorovaného bodu od středu kružnice

### Speciální případy prostých epicykloid

**Kardioida** vznikne, když a=b, neboli když hybná a pevná kružnice mají stejný poloměr. Také se jí říká srdcovka.



Parametrické rovnice kardioidy:

$$x = a[2 * cos(t) - cos(2 * t)]$$

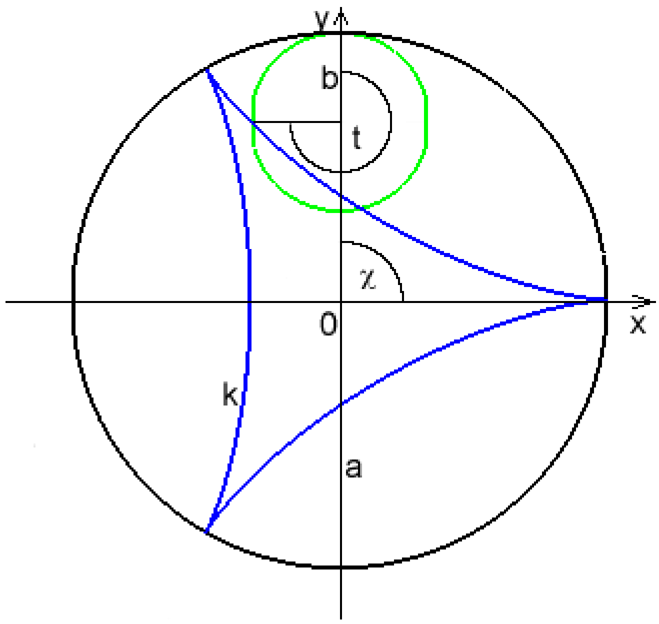
$$y = a[2 * sin(t) - sin(2 * t)]$$

**Nefroida** se nazývá prostá epicykloida o dvou větvích, platí zde a = 2b

## Hypocykloida

Hypocykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří trajektorie bodu pevně spojeného s kružnicí, která se valí svou vnější stranou po vnitřní straně nehybné kružnice.

### Prostá hypocykloida




Pokud bod spjatý s kružnicí leží na obvodu, valením získáme prostou hypocykloidu.

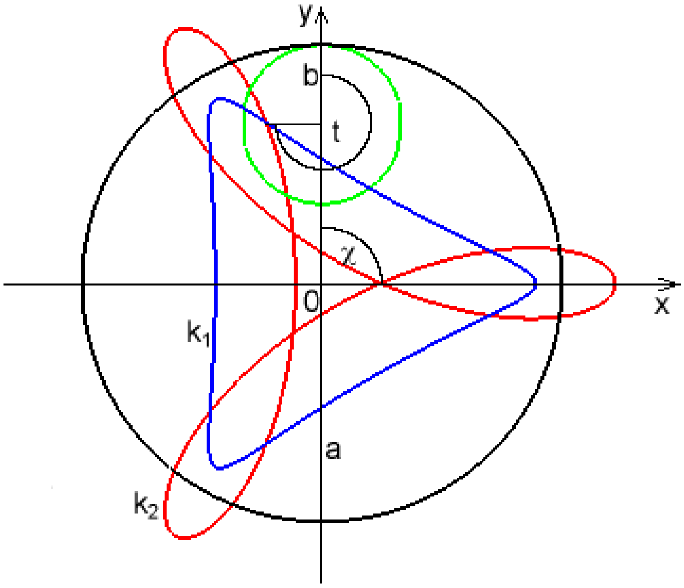
Takto je zadána parametricky:

$$x = (a-b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) + b * \cos\left(\frac{a-b}{a} * t\right)$$

$$y = (a-b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - b * \sin\left(\frac{a-b}{a} * t\right)$$

Pro číslo a/b platí stejná pravidla jako u epicykloid.

## Zkrácená, prodloužená hypocykloida




Leží-li bod tvořící křivku jinde, než na obvodu kružnice, změní to tvar křivky. Pokud leží uvnitř kružnice, opisuje zkrácenou hypocykloidu (na obrázku modře), pokud leží vně kružnice, pak opisuje prodlouženou hypocykloidu (na obrázku červeně).

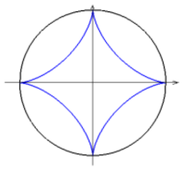
Zkrácenou i prodlouženou hypocykloidu vyjadřují parametrické rovnice:

$$x = (a - b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) + d * \cos\left(\frac{a-b}{a} * t\right)$$

$$y = (a - b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d * \sin\left(\frac{a-b}{a} * t\right)$$

## Speciální případy

**Asteroida** – prostá hypocykloida, pro kterou platí a = 4b

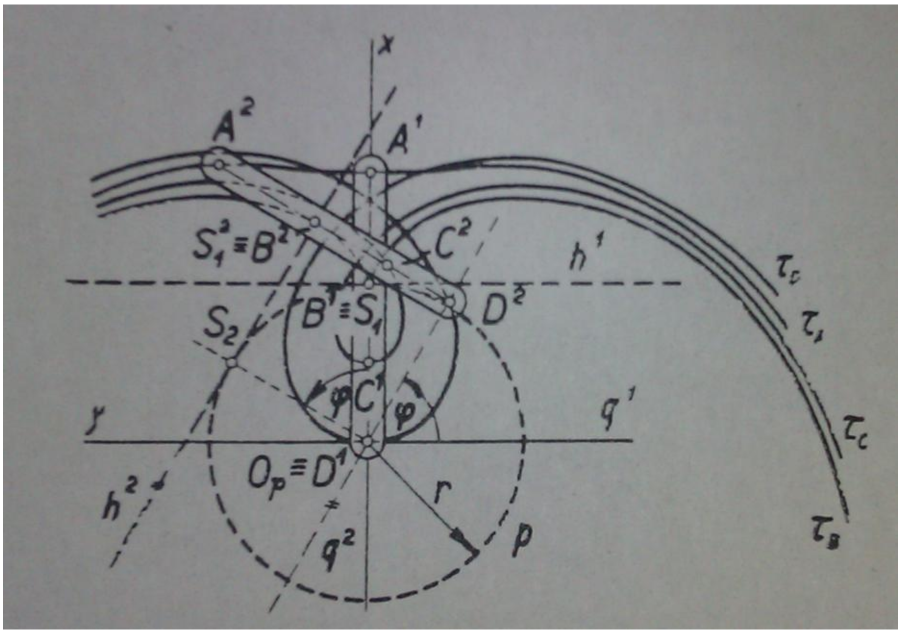


**Úsečka a elipsa** - je možné, aby hypocykloida přešla v kmitavý pohyb na úsečce. Stane se tak, když a = 2b a hypocykloida je prostá. Zkrácená nebo prodloužená hypocykloida s a = 2b vede k elipse. Využívá se k parametrickému určení elipsy.

$x = \left(\frac{a}{2} + d\right) * cos\frac{t}{2}$ y= $\left(\frac{a}{2} - d\right) * sin\frac{t}{2}$

# Evolventa

Evolventu získáme valením hybné přímky h po pevné kružnici p



Sledováním bodu ležícího na přímce h získáme prostou evolventu. Trajektorie bodu v polorovině určené přímkou h a v níž leží střed otáčení, nazveme prodlouženou evolventou (trajektorie D). Pokud sledujeme bod z druhé poloroviny, získáme zkrácenou evolventu (trajektorie A). Zde si můžete všimnout podobnosti s epicykloidami, představte si přímku jako kružnici s nekonečným poloměrem. Trajektorie procházející středem kružnice p je **Archimédova spirála**.

Parametrické rovnice evolventy jsou:

$$x = v * cost + r * t * sint$$

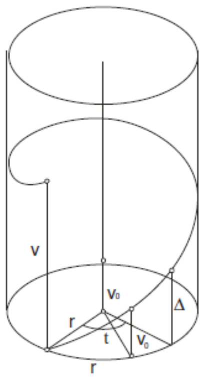
$$y = v * sint + r * t * cost$$

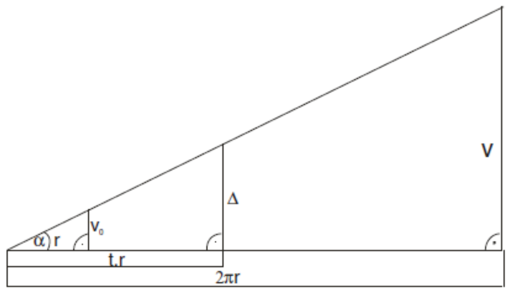
Kde v je vzdálenost tvořícího bodu od středu kružnice p

# Kinematika v prostoru

## Šroubovice

Kinematická geometrie může využít i třetí rozměr. Uvedu jako příklad šroubový pohyb. Tento pohyb tvoří těleso zvané šroubovice.




Parametricky je určen:

$$x = r\,.\cos t \qquad y = r\,.\sin t \qquad z = v\,.t$$

Kde r značí poloměr půdorysu, v značí výškový rozdíl mezi body nad sebou a pořadí funkcí sinus a cosinus pravotočivost nebo levotočivost. Na obrázku i v parametrických rovnicích je pravotočivá šroubovice.

# Závěr

Tato práce mi celkem dobře nastínila jednu velmi zajímavou oblast geometrie.

Doufám, že kdokoli neznalý mou práci přečte, bude obeznámen s tímto učivem tak, jako jsem se s kinematikou seznámil já.

## Zdroje


http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/527/1490/file/kinematika.pdf

URBAN, Alois. Deskriptivní geometrie II. Bratislava. Nakladatelství technické literatury, 1967, 268s.

http://cs.wikipedia.org/wiki/Kinematika